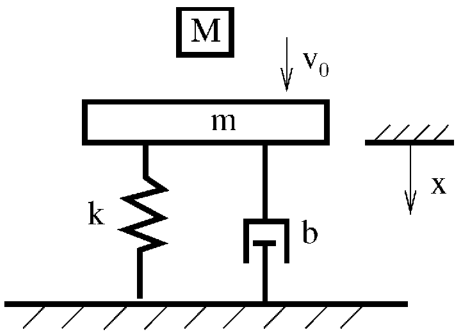
SOUSTAVA S 1° VOLNOSTI – BUZENÍ SKOKEM

SPECIFIKACE PROBLÉMU



Na desku pérové váhy hmotnosti m, vázané k rámu lineární pružinou tuhosti a tlumení konstanty b, dopadá z výšky h plastickým rázem vážený předmět hmotnosti M. Popište časový průběh výchylky desky pérové váhy a určete poměr maximální výchylky ku nové statické rovnovážné poloze, kdy vážený předmět v klidu spočívá na desce. Předpokládejme podkritické tlumení, kdy $b < 2\sqrt{mk}$.

ŘEŠENÍ

Celá akce se skládá ze tří dějů: volný pád váženého předmětu, jeho ráz s deskou váhy a následné tlumené kmitání desky. Dopadovou rychlost v_0 předmětu určíme z věty o změně kinetické energie mezi startovací polohou (z klidu) z výšky h a dopadem. Dostaneme

$$\frac{1}{2} M\, v_0^2 - 0 = Mg\ h\,,$$

odkud

$$v_0 = \sqrt{2gh}\,. \tag{1}$$

Rychlost desky v_1 po plastickém rázu s váženým předmětem určíme z věty o změně hybnosti do svislého směru v průběhu rázu při zanedbání impulsu tíhy za krátkou dobu trvání rázu. Vychází odtud

$$(M + m)v_1 - M\, v_0 = 0\,.$$

Po dosazení z (1) pak

$$v_1 = \frac{M}{M + m}\sqrt{2gh}\,. \tag{2}$$

Pohybová rovnice kmitavého pohybu desky, ze statické rovnovážné polohy dané její tíhou, má zřejmě tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = Mg\,. \tag{3}$$

Tuto rovnici řešíme při počátečních podmínkách $x(0) = 0;\ \frac{dx}{dt}(0) = v_1$, kde v_1 je dáno v (2). Podělením (3) hmotností m a zavedením vlastní frekvence W a poměrného útlumu D kmitající soustavy výrazy

$$W = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ; \qquad D = \frac{b}{2\sqrt{mk}} \tag{4}$$

přepíšeme (3) na tvar

$$\ddot{x} + 2D W \dot{x} + W^2 x = \frac{M}{m} g \,. \tag{5}$$

Řešení této rovnice je součtem homogenního (obecného) řešení x_H a odhadnutého partikulárního řešení x_p

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \,. \tag{6}$$

Homogenní řešení (rovnice (5) má nulovou pravou stranu) určíme řešením charakteristické rovnice

$$l^2 + 2D W\, l + W^2 = 0 \,.$$

přidružené k (5). Pro podkritické tlumení $D < 1$ tato rovnice má řešení

$$l_{1,2} = -D W \pm i\, W \sqrt{1 - D^2} \;,$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Označíme-li

$$W_D = W \sqrt{1 - D^2} \;. \tag{7}$$

(vlastní frekvence tlumené soustavy), lze homogenní řešení psát ve tvaru

$$x_H(t) = C_1\, e^{(-D W + i W_D)t} + C_2\, e^{(-D W - i W_D)t} = e^{-D W t} \left(C_1\, e^{i W_D t} + C_2\, e^{i W_D t} \right), \tag{8}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné komplexní integrační konstanty.

Závorku v (8) přepíšeme pomocí Eulerových vztahů pro exponenciály ryze imaginárních argumentů na tvar

$$C_1 (\cos W_D\, t + i \sin W_D\, t) + C_2 (\cos W_D\, t - i \sin W_D\, t) =$$

$$= (C_1 + C_2) \cos W_D\, t + i\, (C_1 - C_2) \sin W_D\, t \;.$$

Označíme-li $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$ nové integrační konstanty, lze (8) psát jako

$$x_H(t) = e^{-D W t} \,(A \cos W_D\, t + B \sin W_D\, t\,) \,. \tag{9}$$

Protože nula není kořenem charakteristické rovnice, odhadujeme při konstantní pravé straně (5) partikulární řešení také jako konstantu. Velikost této konstanty určíme z podmínky, že x_p je řešením (5). Získáme odtud

$$x_P = \frac{Mg}{mW^2} \,.$$

Po dosazení za W z (4) přepíšeme x_p na tvar

$$x_P = \frac{Mg}{k} \,. \tag{10}$$

Protože *Mg* je tíha váženého předmětu (síla), je $\dfrac{Mg}{k}$ deformace pružiny pérové váhy, při jejím statickém zatížení silou *Mg*. Označme tuto deformaci (novou statickou rovnovážnou polohu) jako x_{st} . Pak

$$x_P(t) = x_{st}\,. \tag{11}$$

Dosazením (9) a (11) do (6) získáme obecné řešení (5) s pravou stranou jako

$$x(t) = x_{st} + e^{-DWt}\left(A\cos W_D\, t + B\sin W_D\, t\right). \tag{12}$$

Integrační konstanty získáme z počátečních podmínek $x(0) = 0$, $\dfrac{dx}{dt}(0) = v_1$.

Derivací (12) vznikne

$$\frac{dx}{dt} = e^{-DWt}\left[-DW\left(A\cos W_D\, t + B\sin W_D\, t\right) + W_D\left(-A\sin W_D\, t + B\cos W_D\, t\right)\right]. \tag{13}$$

Dosazením času $t = 0$ do (12) a (13) a zohledněním počátečních podmínek získáme

$$x(0) = 0 = x_{st} + A \Rightarrow A = -x_{st}\,,$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_1 = -DWA + W_D B \Rightarrow B = \frac{v_1 + DWA}{W_D} = -\frac{DW x_{st} - v_1}{W_D}\,.$$

Dosazením získaných konstant do (12) získáme konkrétní řešení (5), které splňuje zadané počáteční podmínky, ve tvaru

$$x(t) = x_{st} - e^{-DWt}\left(x_{st}\cos W_D\, t + \frac{DW x_{st} - v_1}{W_D}\sin W_D\, t\right). \tag{14}$$

Veličiny D a W jsou dány ve (4), W_D v (7), x_{st} v (10) a (11) a v_1 ve (2). Označíme-li

$$C = \sqrt{x_{st}^2 + \frac{(DW x_{st} - v_1)^2}{W_D^2}}\,,$$

$$\sin g = \frac{x_{st}}{C}; \qquad \cos g = \frac{-v_1 + DW x_{st}}{C\, W_D} \tag{15}$$

lze (14) přepsat na tvar

$$x(t) = x_{st} - Ce^{-DWt}\sin(W_D\, t + g)\,. \tag{16}$$

Nutnou podmínkou extrému (16) je nulovost první derivace. Tedy

$$\frac{dx}{dt} = -C e^{-DWt}\left[-DW\sin(W_D\, t + g) + W_D\cos(W_D\, t + g)\right] = 0\,.$$

Této podmínce vyhovují časy t_k (k celé), pro které

$$tg\,(W_D\, t_k + g) = \frac{W_D}{DW} = \frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}\,.$$

Odtud

$$t_k = \frac{1}{W_D}\left(arctg\,\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D} - g + kp\right). \tag{17}$$

Protože z (15) plyne, že $g > arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$, je první kladný čas nabývání extrému řešení t_k v (17) pro $k=1$. Tento čas je zároveň časem nabývání v absolutní hodnotě největšího extrému. Pro tento čas t_1 je

$$t_1 = \frac{1}{W_D}\left(arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D} - g + p\right).$$

Odtud

$$\sin\left(W_D t_1 + g\right) = \sin\left(arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D} + p\right) = -\sin\left(arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right) =$$

$$= -\frac{tg\left(arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)}{\sqrt{1+tg^2\left(arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)}} = -\frac{\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}}{\sqrt{1+\frac{1-D^2}{D^2}}} = -\sqrt{1-D^2} \tag{18}$$

Dosazením (17) a (18) do (16) dostaneme hodnotu x_1 největšího extrému ve tvaru

$$x_1 = x(t) = x_{st} + C\sqrt{1-D^2}\,\exp\left[-\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\left(arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D} - g + p\right)\right]. \tag{19}$$

V tomto výrazu C a g jsou dány v (15).

Poznámka: Pro $v_1 = 0$ (vstup na desku váhy z výšky $h=0$) z (15) plyne

$$C = \frac{x_{st}}{\sqrt{1-D^2}}.$$

$$tgg = \frac{\sin g}{\cos g} = \frac{\sqrt{1-D^2}}{D} \Leftrightarrow g = arctg\,\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}.$$

Dosazením do (19) pro tento případ největší extrém x_1 je

$$x_1 = x_{st}\left(1 + e^{-\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}p}\right).$$

Poměr $\frac{x_1}{x_{st}}$ (tedy největší výkyv váhy ve vztahu k rovnovážné poloze označující hmotnost váženého předmětu) závisí pouze na poměrném útlumu D uložení desky váhy k rámu. Tato závislost je zobrazena v grafu. Např. pro $D = 0{,}5\ (=50\%)$ je $x_1 = 1{,}163$. Pro $M = 100\,kg$ tedy váha vykývne v největším extrému na 116,3 *kg*.