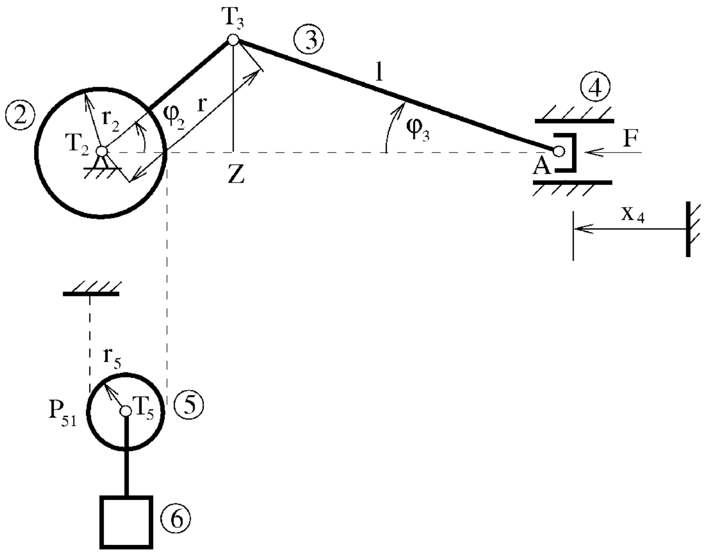
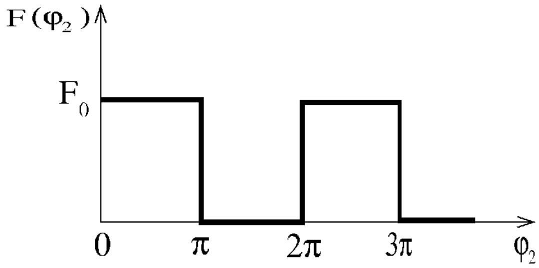
ZDVIHACÍ ZAŘÍZENÍ S KLIKOVÝM MECHANISMEM

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Zdvihací zařízení se skládá z bubnu poloměru r_2 osového momentu setrvačnosti I_2 k ose rotace, na který je navinuto (nehmotné) lano pohánějící volnou kladkou poloměru r_5, hmotnosti m_5 a osového momentu setrvačnosti I_5 k ose symetrie, současně s břemenem hmotnosti m_6. Pohon se uskutečňuje silou F na píst klikového mechanismu hmotnosti m_4, jehož klika poloměru r je pevně spojena s bubnem. Ojnice má délku l, hmotnost m_3 a osový moment setrvačnosti ke klikovému čepu (který nechť je zároveň jejím těžištěm) I_3. Průběh síly v závislosti na úhlu j_2 natočení bubnu (kliky) má tvar podle obrázku a je po částech konstantní. Formulujte pohybovou rovnici mechanismu a připravte ji pro numerické řešení rozběhu zařízení při zadaných počátečních podmínkách $j_2(0) = j_0$, $\frac{dj_2}{dt}(0) = w_2(0) = 0$ (rozběh z klidu).





Poznámka: Daný průběh síly přibližně odpovídá pohonu dvoutaktním jednoválcovým spalovacím motorem. Síla F je dána součinem tlaku spalin ve válci a plochy pístu. V průběhu nepracovního taktu (sání a komprese) je síla F nulová.

ŘEŠENÍ

Pohybovou rovnici formulujeme užitím metody redukce hmotností a silových účinků při redukci na rotující člen 2 (buben s klikou). Redukovaný moment setrvačnosti I_r určíme z bilance kinetické energie. Pro rovinným pohybem se pohybující členy 3 a 5 použijeme pro vyjádření jejich kinetické energie Königovy věty platné při základním rozkladu ve středu hmotnosti. Zmíněná bilance má tvar

$$I_r\, w_2^2 = I_2\, w_2^2 + m_3 (r\, w_2)^2 + I_3\, w_3^2 + m_4\, v_4^2 + m_5\, v_5^2 + I_5\, w_5^2 + m_6\, v_5^2 . \qquad (1)$$

V tomto výrazu w_2 je úhlová rychlost rotace bubnu, v_4 rychlost posuvu pístu, v_5 rychlost posuvu břemene (a současně rychlost unášivého posuvu při valení členu 5 po svislé přímce), w_5 je úhlová rychlost druhotné rotace valení členu 5, w_3 úhlová rychlost druhotné rotace při pohybu členu 3 a rw_2 rychlost unášivého posuvu s těžištěm při pohybu tohoto členu.

Protože P_{51} je pól pohybu valení volné kladky, ze kterého jsou vidět rychlosti všech bodů pod týmž úhlem, a protože k navíjení lana dochází bez prokluzu, platí zřejmě

$$v_5 = r_5\, w_5 = \frac{r_2\, w_2}{2} \Leftrightarrow w_5 = \frac{w_2}{2} \frac{r_2}{r_5} . \qquad (2)$$

Rozdělme trojúhelník $AT_2\, T_3$ společnou odvěsnou $Z\, T_3$ na dva pravoúhlé trojúhelníky. Počítáme-li tuto společnou odvěsnu z obou takto vzniklých pravoúhlých trojúhelníků, dostaneme

$$r \sin j_2 = l \sin j_3$$

odkud po zavedení parametru klikového mechanismu

$$l = \frac{r}{l} < 1 . \qquad (3)$$

máme

$$\sin j_3 = l \sin j_2 . \qquad (4)$$

Derivujeme-li tuto rovnici (jako složenou funkci) podle j_2 obdržíme

$$\cos j_3 \frac{dj_3}{dj_2} = l \cos j_2 . \qquad (5)$$

Protože $j_3 \in \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right)$, kde je kosinus kladný, platí

$$\cos j_3 = \sqrt{1 - \sin^2 j_3} . \qquad (6)$$

Dosazením (4) do (6) a poté do (5) vznikne

$$\frac{dj_3}{dj_2} = p_{32} = \frac{l \cos j_2}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 j_2}} . \qquad (7)$$

Kótujeme-li výchylku x_4 pístu od „pravé úvrati“ (viz obr.) dostáváme určením vodorovných odvěsen výše popsaných pravoúhlých trojúhelníků výraz

$$x_4 = r + l - r \cos j_2 - l \cos j_3 .$$

Zavedením parametru l podle (3) odtud plyne

$$x_4 = l [1 - \cos j_3 + l (1 - \cos j_2)] .$$

Derivací podle j_2 dostaneme vzhledem k (4) a (3) po dílčí úpravě

$$p_{42} = \frac{dx_4}{dj_2} = r \sin j_2 \left(1 + \frac{dj_3}{dj_2} \right). \qquad (8)$$

Protože zřejmě pro převody mezi jednotlivými členy platí

$$\frac{w_3}{w_2} = p_{32}, \quad \frac{v_4}{w_2} = p_{42}, \qquad (9)$$

dostáváme dosazením (2) a (9) do (1) a krácením w_2^2 pro I_r výraz

$$I_r = I_2 + m_3 r^2 + I_3 p_{32}^2 + m_4 p_{42}^2 + (m_5 + m_6) \frac{r_2^2}{4} + I_5 \frac{r_2^2}{4 r_5^2}. \qquad (10)$$

Protože převody p_{32} v (7) i p_{42} v (8) jsou proměnné, je třeba připravit jejich derivace (podle j_2). Derivujeme podle pravidel o derivování součinu, podílu, složené funkce a elementárních funkcí x^n, $\sin x$ a $\cos x$. Dostaneme po příslušných úpravách

$$\frac{dp_{32}}{dj_2} = \frac{l\left(l^2 - 1\right)\sin j_2}{\left(1 - l^2 \sin^2 j_2\right)^{3/2}}; \qquad \frac{dp_{42}}{dj_2} = r\left[\cos j_2 \left(1 + \frac{dj_3}{dj_2}\right) + \sin j_2 \frac{dp_{32}}{dj_2}\right]. \qquad (11)$$

Derivací (10), kde proměnné jsou právě jen převody p_{32} a p_{42}, vzniká

$$\frac{dI_r}{dj_2} = 2\left(p_{32} \frac{dp_{32}}{dj_2} + p_{42} \frac{dp_{42}}{dj_2} \right). \qquad (12)$$

Redukovaný moment síly M_r určíme z balance výkonů pracovních účinků. Pracovními účinky je síla F a tíhy členů 3, 5, 6. Zmíněná bilance má proto tvar

$$M_r w_2 = F v_4 - (m_5 + m_6) g v_5 - m_3 g r w_2 \cos j_2 .$$

Dosazením z (2) a (9) po krácení w_2 máme

$$M_r = F p_{42} - (m_5 + m_6) g \frac{r_2}{2} - m_3 g r \cos j_2 . \qquad (13)$$

Pohybová rovnice má pak formu

$$\frac{1}{2} \frac{dI_r}{dj_2} w_2^2 + I_r a_2 = M_r . \qquad (14)$$

Z definičních vztahů $w_2 = \dfrac{dj_2}{dt}$; $a_2 = \dfrac{d^2 j_2}{dt^2}$ odtud máme

$$\frac{d^2 j_2}{dt^2} = \frac{M_r - \dfrac{1}{2} \dfrac{dI_r}{dj_2} \cdot \left(\dfrac{dj_2}{dt} \right)^2}{I_r} .$$

Jak redukované momenty M_r, I_r, tak derivace $\dfrac{dI_r}{dj_2}$ jsou funkcemi neznámé j_2 v této diferenciální rovnici druhého řádu. Převodem této rovnice na soustavu dvou rovnic prvního řádu pro vektorovou proměnnou $\mathbf{x}^T = [j_2, w_2]$ dostáváme

$$\frac{dj_2}{dt} = w_2\,,$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{M_r(j_2) - \dfrac{1}{2}\dfrac{dI_r}{dj_2}(j_2)w_2^2}{I_r(j_2)}\,. \tag{15}$$

Algoritmus určení pravé strany této soustavy pomocí j_2 a w_2 je následující:

1) Vyčíslíme p_{32} podle (7).
2) Určíme p_{42} podle (8).
3) Vypočítáme I_r podle (10) a M_r podle (13).
4) Vyčíslíme $\dfrac{dp_{32}}{dj_2}$ a poté $\dfrac{dp_{42}}{dj_2}$ podle (11).
5) Určíme $\dfrac{dI_r}{dj_2}$ podle (12).
6) Vypočítáme $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$ podle (15).

Pro zvolené hmotové a geometrické parametry, sílu F_0 a počáteční podmínky řešíme numericky soustavu (15) v prostředí MATLAB prostřednictvím procedury ODE. Výstupy zpracujeme formou grafů $j_2(t), w_2(t), a_2(t)$ event. $x_5(t), v_5(t), a_5(t)$. Je možné řešit úlohu rozběhu pro dostatečně velkou sílu F_0 nebo ustáleného stavu pro nenulovou rychlostní počáteční podmínku a sílu F_0 určenou tak, aby práce jí dodaná za cyklus $j_2 \in \langle 0, 2p \rangle$ byla rovna (nebo o něco větší) práci spotřebované tíhami členů za stejný cyklus. Ustálený stav vykazuje vlivem nekonstantnosti převodů a hnací síly $F(j_2)$ nerovnoměrnost chodu. Tato nerovnoměrnost klesá se vzrůstajícím osovým momentem setrvačnosti bubnu I_2.