DYNAMIKA SOUSTAV

Podle druhu zadaných veličin rozlišujeme při řešení dynamiky soustav těles dva základní typy úloh:

1) **Úloha kinetostatiky**, kdy je předepsán druh pohybu (např. rovnoměrný pohyb) tolika členů soustavy, kolik tato má stupňů volnosti. Úkolem je najít polohovou závislost statických akčních účinků, pro udržení předepsaných pohybů. Počítaných statických akcí je nejméně tolik, kolik je předepsaných druhů pohybu. Tyto silové účinky mívají předepsaný směr a počítá se polohová závislost jejich velikosti, při uvažování setrvačných účinků.

   Poznámka: Nejčastější případ soustav jsou mechanismy, tedy soustavy s jedním stupněm volnosti, kdy předepisujeme zpravidla pohyb hnacího členu, jenž rotuje.

2) **Úloha vlastní dynamiky**, kdy jsou předepsána zatížení všech členů zadanými statickými akcemi (známých směrů, jejichž velikosti jsou známými funkcemi poloh, rychlostí, případně času). Úkolem je řešit pohyb jednotlivých členů soustavy, jenž zadané zatížení vyvolá.

   Poznámka: V obou případech úloh mohou neznámými být i statické reakce ve vazbách. Je-li potřeba provádět dimenzování vazeb (ložisek, kloubů), je nutno počítat i tyto reakce.

METODY VEKTOROVÉ MECHANIKY

Metody řešení dynamiky soustav těles prostřednictvím posjmů vektorové mechaniky jsou dvě. **Metoda uvolňování** je velice univerzální, takže se hodí i pro úlohy se třením a pro soustavy s libovolným počtem stupňů volnosti. Používá se všude tam, kde je zapotřebí znalost reakcí ve vazbách. **Metoda redukce hmotností a silových účinků** se á priori zbavuje reakcí. Nehodí se proto pro úlohy se třením. Rovněž je omezena na soustavy s jedním stupněm volnosti. Hodí se proto ideálně pro řešení hladkého pohybu mechanismů, protože přímo vede k vlastní pohybové rovnici.

1. METODA UVOLŇOVÁNÍ

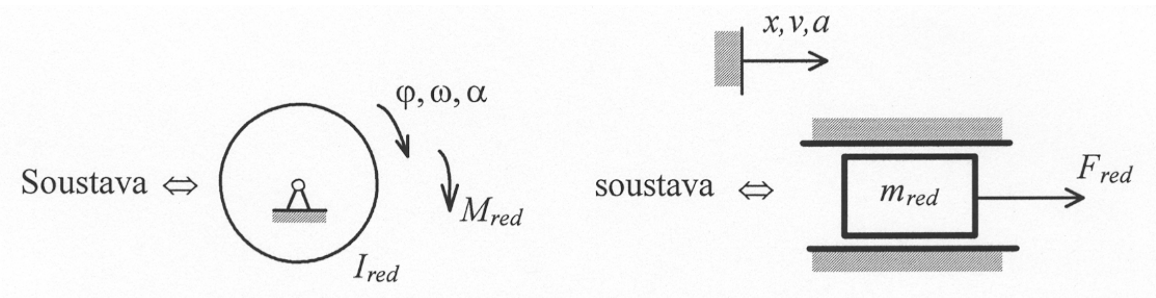
Princip metody je znám z MECHANIKY 1, neboť je stejný ve statice jako v dynamice. Zde pouze přibývají setrvačné účinky působící na pohybující se tělesa. Myšlenými řezy uvolníme ve vazbách jednotlivá tělesa (popřípadě i skupiny těles) za současného připojení reakčních účinků podle druhu uvolněné vazby (Mechanika 1). Podle D´Alembertova principu statické (vnější) síly a dynamické (setrvačné) účinky tvoří rovnovážnou silovou soustavu. Podle druhu soustavy sil (a dvojic) formulujeme příslušný počet podmínek rovnováhy (včetně povinného počtu momentových podmínek). Z matematického hlediska dostáváme soustavu algebraicko – diferenciálních rovnic. Soustava je algebraická vzhledem ke statickým reakcím a diferenciální vzhledem k tolika polohovým (časově závislým) proměnným, kolik má soustava stupňů volnosti. Vyskytne-li se v rovnicích více polohových proměnných (a jejich časových derivací), je třeba nadbytečné vyjádřit ze zdvihových závislostí (a jejich derivace prostřednictvím převodových funkcí a derivací převodových funkcí). Matematickým vyloučením reakcí (např. dosazovací metodou) získáme pouze soustavu vlastních pohybových diferenciálních rovnic, kterých je tolik, kolik má soustava stupňů volnosti. Jejich analytické řešení je možné jen ve velmi speciálních případech. Obecně se tyto rovnice řeší numericky, kdy výsledkem jest pro zadanou tabulku časů (nezávisle proměnná) tabulka poloh hnacích členů soustavy (závisle proměnná). Tím je řešen pohyb hnacích členů. Pohyby hnaných členů získáme přes výše popisované zdvihové závislosti. Ze znalosti pohybů je možno (pro příslušnou tabulku časů) počítat setrvačné účinky a z rovnic pro reakce, vzniklých aplikací dosazovací metody, lze vypočítat, jakožto závisle proměnné, i reakce a tím dimenzovat vazby.

***Poznámky*:**

1) Jestliže cílem řešení je pouze znalost pohybu (úloha vlastní dynamiky), lze podmínky rovnováhy **pro stav bez tření** formulovat s výhodou tak, že se fyzikální cestou od samého počátku zbavíme **vnějších reakcí** (ve vazbách na rám). **Vnitřních reakcí** (ve vazbách těles mezi sebou) se tímto způsobem zbavit nelze. Ty je nutno vyloučit matematicky (například výše vzpomenutou dosazovací metodou).
2) Existence třecích účinků situaci komplikuje, protože třecí síly (a dvojice), jakožto statické akce, závisejí na velikosti reakcí. Z tohoto důvodu nelze při řešení pohybu se á priori zbavovat vnějších reakcí. Všechny reakce nutno vylučovat matematicky dosazovací metodou.
3) Největší komplikace působí moment čepového tření. Tento třecí účinek závisí nelineárně na složkách reakcí v rotační vazbě, takže algebraické rovnice pro reakce nejsou lineární a nelze tudíž matematicky reakce vylučovat dosazovací metodou. Jediná možnost, jak moment čepového tření do výpočtu zahrnout, je linearizace vztahu $M_č = f_č \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ (viz Mechanika 1) pro určitý omezený rozsah pohybu členu v rotační vazbě.

2. METODA REDUKCE HMOTNOSTÍ A SILOVÝCH ÚČINKŮ

Metoda spočívá ve volbě jednoho tělesa soustavy (obvykle hnacího členu mechanismu) za tzv. **redukční člen**. Redukční člen může vykonávat buď posuvný nebo rotační pohyb. Kinematické parametry popisující pohyb tohoto členu, tedy j, w, a pro případ rotace, nebo *x*, *v*, *a* pro případ posuvu, se objevují jako proměnné v níže odvozené pohybové rovnici. Na redukční člen redukujeme veškerou hmotnost hmotných členů srovnáním kinetických energií a veškeré statické akční (tj. pracovní) silové účinky srovnáním jejich výkonů.



Za redukovaný hmotový parametr v případě rotace redukčního členu volíme **redukovaný moment setrvačnosti** I_{red} a v případě posuvu **redukovanou hmotnost** m_{red}. Bilance kinetické energie má tvar pro rotaci redukčního členu

$$\frac{1}{2} I_{red} w^2 = \sum_i E_{k\,i} \,. \qquad (1)$$

Zde sčítáme přes všechny pohybující se členy soustavy. Poznamenejme, že pro posuv tělesa je $E_k = \frac{1}{2} m v^2$, pro rotaci $E_k = \frac{1}{2} I w^2$ a pro pohyb rovinným pohybem při rozkladu ve středu hmotnosti platí Königova věta. Nelze-li rozložit pohyb ve středu hmotnosti, nahrazujeme těleso (v zadaných místech) dvěma hmotnými body m_A, m_B a korekčním momentem setrvačnosti I_{kor}. Pro kinetickou energii takového tělesa pak platí

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_A\, v_A^2 + m_B\, v_B^2 + I_{kor}\, w^2\right), \tag{2}$$

kde v_A, v_B jsou rychlosti míst náhrady hmotnými body a w úhlová rychlost druhotné rotace.

Poznámka: Jestliže redukční člen se posouvá, má bilance E_k tvar

$$\frac{1}{2} m_{red}\, v^2 = \sum_i E_{k\,i}\ . \tag{1´}$$

Za redukovaný silový parametr v případě rotace redukčního členu **volíme redukovaný moment** (silové dvojice) M_{red} a v případě jeho posuvu **redukovanou sílu** F_{red}. Pro případ rotace redukčního členu má bilance výkonů pracovních sil tvar

$$M_{red}\, w = \sum_j P_j\ . \tag{3}$$

Zde sčítáme přes všechny statické akční účinky působící na jednotlivé členy soustavy (je jich obecně jiný počet než pohybujících se členů). Poznamenejme, že výkon síly je skalárním součinem síly a rychlosti a výkon dvojice (momentu) je skalárním součinem momentu s úhlovou rychlostí.

Poznámka: Jestliže se redukční člen posouvá, má bilance P tvar

$$F_{red}\, v = \sum_j P_j\ . \tag{3´}$$

Aplikací věty o změně kinetické energie mezi obecnou a startovací polohou soustavy máme

$$E_k - E_{k_0} = W\ ,$$

kde W je práce všech pracovních statických účinků. Časovou derivací tohoto vztahu dostaneme

$$\frac{d\,E_k}{dt} = P\ .$$

Dosazením ze (1) a (3) dostaneme pro případ rotace redukčního členu (pro obecně I_{red} závislé na poloze j soustavy)

$$\frac{1}{2}\frac{d\,I_{red}}{d\,j}\frac{d\,j}{dt} w^2 + I_{red}\, w\frac{dw}{dt} = M_{red}\, w\ ,$$

kde jsme použili vztahy pro derivaci součinu a složené funkce. Krácením w odtud

$$\frac{1}{2}\frac{d\,I_{red}}{d\,j}\, w^2 + I_{red}\, a = M_{red}\ , \tag{4}$$

což je vlastní pohybová rovnice soustavy.

Poznámka: V případě, že redukční člen se posouvá, dostaneme analogickým dosazením výrazů (1´) a (3´) pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{2}\frac{d\,m_{red}}{dx}\,v^2 + m_{red}\,a = F_{red}\,. \tag{4´}$$

To, že redukovaný hmotový parametr je závislý na poloze soustavy je příznak tzv. **soustavy s proměnnými převodovými poměry** (mechanismus). U soustavy **s konstantními převodovými poměry** (soustavy složené z kladek a spoluzabírajících ozubených kol) tyto parametry na poloze soustavy nezávisejí. Pohybová rovnice má pak jednodušší tvar

$$I_{red}\,a = M_{red}$$

pro případ rotujícího redukčního členu, resp.

$$m_{red}\,a = F_{red}$$

pro případ posouvajícího se redukčního členu. Zároveň odtud plyne, že působí-li na soustavu s konstantními převodovými poměry konstantní zatížení, pohybuje se toto s konstantním zrychlením (všech členů).

METODY ANALYTICKÉ MECHANIKY

Zatímco podstatou metod **vektorové mechaniky** je vektorová rovnováha působících sil (v dynamice včetně setrvačných účinků), podstatou metod **analytické mechaniky** je utvoření energetických funkcí, z nichž operacemi matematické analýzy (zejména derivováním) získáme potřebné statické i dynamické rovnice. Než překročíme ke dvěma metodám této kapitoly, definujeme nové pojmy.

ZÁKLADNÍ POJMY

Poloha každé mechanické soustavy může být popsána různými souřadnicemi. Z důvodů snadnějšího vyjádření jiných potřebných veličin může být těchto souřadnic víc než je pro jednoznačné určení polohy soustavy nezbytně nutné. V takových případech jsou souřadnice **závislé**. Musí mezi nimi existovat vzájemné vztahy. Těmto vztahům říkáme **vazbové rovnice** nebo krátce **vazby**. Ve zmíněných vazbách se kromě souřadnic polohy může vyskytovat i čas *t*. V nejobecnějším případě tzv. **neholonomních vazeb** lze vazbové rovnice popsat pouze ve formě diferenciálů (souřadnic i času). Těmito případy se nebudeme zabývat. Jestliže tyto diferenciální vztahy lze integrovat, je možno vazbové rovnice napsat ve tvaru transcendentních (algebraických) rovnic typu

$$f_i\left(y_1,\ldots,y_p,t\right)=0; \quad i-1,\ldots,r\,. \tag{5}$$

Vazba se pak nazývá **holonomní**. Vyskytuje-li se ve vazbové rovnici explicitně čas *t*, nazývá se vazba **nestacionární** nebo též **reonomní**. Nevyskytuje-li se v ní explicitně čas *t*, nazývá se vazba **stacionární** nebo též **skleronomní**.

Poznámka: Při pohybu mechanické soustavy se souřadnice *y* s časem mění. Ve vazbové rovnici je v těchto případech **vždy** obsažen čas, ale pouze **implicitně**, zprostředkovaně přes souřadnice jako složená funkce. Tento stav neznamená nestacionárnost vazby.

V mechanice 1 byl definován pojem **počtu stupňů volnosti** mechanické soustavy jakožto počtu **nezávislých** souřadnic, jež jednoznačně určují polohu všech bodů (členů) soustavy. Mezi těmito souřadnicemi neexistují žádné vazby (vztahy). Všechny mohou nabývat libovolných hodnot. Říkáme jim **zobecněné souřadnice**. Značíme je q_i a jejich počet je *n* (= počet stupňů volnosti soustavy). Mohou to být buď délky (rozměr metr) nebo úhly (rozměr radián). Jakékoliv jiné souřadnice x_j nazveme **fyzikální souřadnice**. Jestliže fyzikálních souřadnic je *p*, musí existovat *p* vazeb tvaru (5), tedy

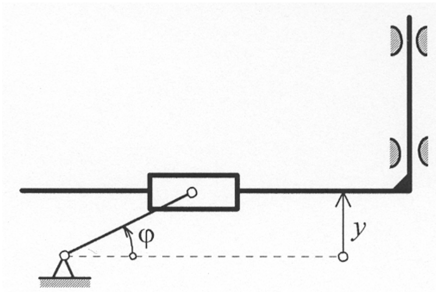
$$f_i\left(x_1,\ldots,x_p,q_1,\ldots,q_n,t\right)=0;\quad i=1,\ldots,p\,.$$

Z těchto vazeb lze (alespoň lokálně) „osamostatnit“ závislé fyzikální souřadnice a vyjádřit je na základě souřadnic zobecněných ve tvaru

$$x_j=x_j\left(q_1,\ldots,q_n,t\right),\quad j=1,\ldots,p\,. \tag{6}$$

PŘÍKLADY VAZEB

A) Kulisový mechanismus (viz obr.) je coby mechanismus soustavou s jedním stupněm volnosti.

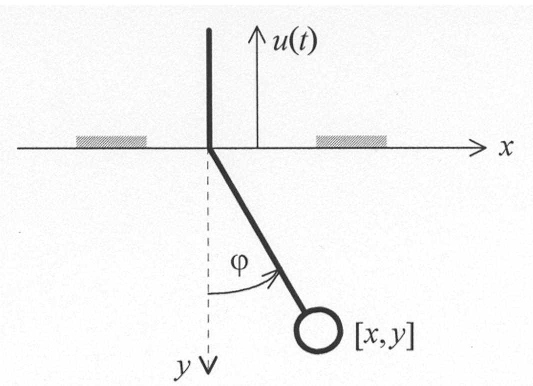


Zobecněnou souřadnicí je úhel j natočení hnací kliky. Přesto zavádíme pro polohu kulisy fyzikální souřadnici *y*. Mezi souřadnicemi *y* a j existuje vazba (nazývaná ve vektorové mechanice zdvihovou závislostí)

$$y=r\sin j\ ,$$

kde *r* je délka kliky. Je to vazba typu (6) „rozřešená podle fyzikální souřadnice *y*“. Vazba je skleronomní, protože čas *t* se v ní vyskytuje jako složená funkce j při otáčení kliky (pohybu mechanismu). Ve strojařské praxi je těchto vazeb drtivá převaha.

B) Uvažujeme matematické kyvadlo s proměnnou délkou závěsu (viz obr.). Protože



pohyb horního konce závěsu je **předepsaný**, jedná se o soustavu s 1 stupněm volnosti. Pohyb horního konce závěsu nedodává druhý stupeň volnosti – funkce $u(t)$ je zadaná, tudíž nemůže býti libovolná. Za zobecněnou souřadnici volme úhel natočení j (viz obr.). Volíme-li v obr. zavedené souřadnice *x*, *y* jako další (fyzikální) souřadnice, tak jestliže *l* je celková délka závěsu, platí pro ně vztahy

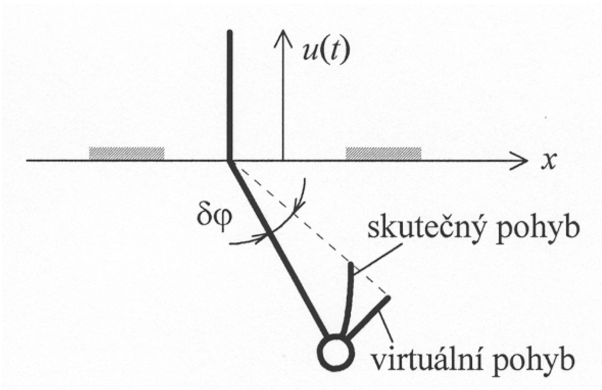
$$x=[l-u(t)]\sin j\ ,$$

$$y=[l-u(t)]\cos j\ .$$

Opět jsou to vazby typu (6), ovšem čas *t* se v nich vyskytuje přímo (nikoliv pouze zprostředkovaně přes úhel j). Proto vazby jsou nestacionární (reonomní).

Virtuálním pohybem mechanické soustavy nazveme diferenciálně malý pohyb při respektování vazeb explicitně nezávisejících na čase. Nezávislých virtuálních pohybů je možno udělit soustavě tolik, kolik má tato stupňů volnosti. Tyto nezávislé virtuální pohyby odpovídají vždy virtuálním přírůstkům zobecněných souřadnic $d\,q_i$. Z naznačené definice je zřejmé, že v případě stacionárních vazeb virtuální pohyb je současně diferenciálně malým skutečným pohybem. U vazeb nestacionárních se tyto pohyby liší. Tam v případě virtuálního pohybu necháme plynout čas při změnách souřadnic, ale zastavíme čas pro průběhy předepsaných pohybů.

Například kyvadla s proměnnou délkou závěsu (viz obr.) se skutečný diferenciálně malý pohyb děje po oblouku obecné rovinné křivky závisející na průběhu funkce $u(t)$, virtuální pohyb se děje po kruhovém oblouku. Pohyb je proto virtuální, protože u reálné soustavy k němu nemůže dojít. Necháme-li plynout čas na kývavý pohyb kyvadla, mění se zároveň jeho délka (pokud $u(t)$ není konstantou, ale pak by se zase nejednalo o renomní vazbu).



Pro vazby typu (6) tak při virtuálním pohybu je

$$dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i , \qquad (7)$$

zatímco

$$dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt .$$

Pro soustavu s jedním stupněm volnosti ($n = 1$) odpadá sumace. Je pak

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial q} dq , \quad j = 1,\dots, p \ , \qquad (8)$$

kde q je zobecněná a x_j fyzikální souřadnice. V případě skleronomních vazeb by tentýž vztah platil i pro diferenciály*). Pro případ vazeb reonomních pro ně platí

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial q} dq + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt .$$

Důležitou vlastností virtuálních pohybů je, že při nich **reakční** (statické) **síly nekonají práci**. Situaci lze ilustrovat opět na případě kyvadla s proměnnou délkou závěsu, kde reakční síla v laně při skutečném pohybu práci koná, zatímco při virtuálním nikoliv (přírůstek dráhy má je nulový).

PRINCIP VIRTUÁLNÍCH PRACÍ

Formulujme bez důkazu **princip virtuálních prací**: Je-li soustava rovnováze (statické nebo dynamické), je součet virtuálních prací všech pracovních účinků nulový pro libovolný nezávislý virtuální pohyb.

Poznámka: Používáme-li princip virtuálních prací ve statice (pro úlohy statické rovnováhy podobně jako byly řešeny v mechanice 1 metodou uvolňování), jsou pracovními účinky pouze statické akce. Při použití v dynamice (pro formulaci pohybových rovnic) jsou pracovními účinky statické akce a setrvačné účinky.

---

*) Zde bychom mohli parciální derivaci nahraditi derivací obyčejnou.

Matematická formulace principu

$$(dW)_j = \left(\sum_i F_i \, dx_i \right)_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Užitím (9) dostaneme *n* rovnic (tolik, kolik je stupňů volnosti). Jsou to ve statice rovnice rovnováhy, v dynamice pohybové rovnice. Index *j* v (9) odpovídá nezávislým virtuálním pohybům (přírůstkům zobecněných souřadnic dq_j). Index *i* odpovídá pracovním účinkům F_i (silám i dvojicím). Fyzikální souřadnice x_i volíme příslušející k pracovnímu účinku tak, aby příslušná virtuální práce se počítala jako prostý součin (včetně znaménka) pracovního účinku a jemu příslušejícího virtuálního přírůstku fyzikální souřadnice. Je-li tedy pracovním účinkem síla, je příslušnou fyzikální souřadnicí délková souřadnice. Je-li jím dvojice, je fyzikální souřadnicí úhel natočení.

Jestliže se jedná o konzervativní soustavu, jsou všechny (statické) síly konzervativní, takže jejich (úhrnná) práce po uzavřené křivce je nulová. Musí proto existovat skalární funkce zobecněných souřadnic, že element práce je totálním diferenciálem této funkce. Tuto funkci nazýváme **potenciální energie** $E_p = E_p(q_1, \ldots, q_n)$. Princip virtuálních prací má potom tvar

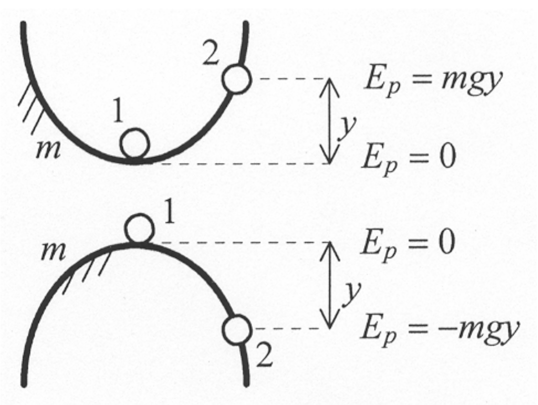
$$d\,E_p = 0\,, \tag{10}$$

což znamená, že potenciální energie má **stacionární bod**. Stacionární bod E_p je tedy příznakem rovnovážné polohy soustavy při statickém řešení. Pro soustavu s *n* stupni volnosti je nutnou podmínkou stacionárnosti E_p nulovost všech jejich parciálních derivací podle zobecněných souřadnic, tedy

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Podmínka (11) v případě splněnosti může znamenat rovnovážnou polohu **stabilní**, kdy malé silové působení navíc (porucha) způsobí malou změnu polohy soustavy, nebo rovnovážnou polohu **labilní**, kdy malá porucha způsobí velkou změnu polohy soustavy. Z matematického hlediska je (11) nutnou podmínkou extrému potenciální energie. Pro postačující podmínku je potřeba zkoumat matici druhých parciálních derivací, tzv. **Hessovu matici** v bodě $\boldsymbol{q}_0 = [q_{10}, \ldots, q_{n0}]$, ve kterém platí (11). Jestliže tato matice

$$\boldsymbol{H}_{E_p}(\boldsymbol{q}_0) = \left[\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \, \partial q_j}(\boldsymbol{q}_0) \right]_{i,j=1}^{n} \tag{12}$$



je **pozitivně definitní**, má v uvedeném bodě E_p **minimum** a příslušná rovnovážná poloha je stabilní. Situaci znázorníme kuličkou v důlku (viz obr.). V poloze 1 má E_p minimum, tedy poloha je stabilní. Udělíme-li takové kuličce poruchu, spadne zpět do důlku a změna polohy je malá. Jestliže matice (12) je **negativně definitní**, má v uvedeném bodě E_p **maximum** a příslušná rovnovážná poloha je labilní. Situaci znázorníme kuličkou na vrcholku kopce (viz obr.). V poloze 1 má E_p maximum, tedy poloha je labilní. Sebemenší silové působení navíc (způsobující nenulovost počátečních kinematických podmínek) má za následek velikou změnu polohy. Kulička totiž spadne z vrcholku.

Jestliže matice (12) je **indefinitní**, má E_p v uvedeném bodě **sedlový bod** a rovnovážná poloha tímto bodem popsaná je opět labilní. Situaci lze popsat kuličkou na hřbetě koňského sedla. Jakákoliv porucha „mimo směr jízdy koně“ způsobí velkou změnu polohy kuličky. Rovnovážná poloha je tedy labilní.

Poznámka: 1) Jestliže matice (12) je **semidefinitní** (ať už pozitivně nebo negativně), bylo by pro posouzení typu stacionárního bodu E_p (a tím kvality rovnovážné polohy) potřeba vyšších derivací. Tímto případem se nebudeme zabývat.

2) Definitivitu matice lze určovat použitím tzv. **Hurwitzova kriteria**. Jestliže všechny determinanty matice $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ tvaru $\det\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{l}$ (tzv. **hlavní minory** l - tého řádu) pro $l = 1,\ldots,n$ jsou kladné, je matice $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní. Jsou-li všechny hlavní minory sudého řádu kladné a hlavní minory lichého řádu záporné, je matice negativně definitní. Nastane-li jakákoliv jiná kombinace znamének hlavních minorů (a současně žádný není nulový), je matice indefinitní.

Právě popsaná poměrně složitá rozhodování se podstatně zjednodušují pro soustavy s 1 stupněm volnosti, kdy E_p je funkcí jediné zobecněné souřadnice *q*. Podmínka (11) má formu nulovosti obyčejné derivace

$$\frac{d\,E_p}{d\,q} = 0 \tag{11´}$$

a matice (12) se redukuje na jediný prvek $\frac{d^2 E_p}{d\,q^2}$. Jestliže v bodě q_0, kde je splněna (11´) je $\frac{d^2 E_p}{d\,q^2}(q_0) > 0$, má E_p minimum a poloha je stabilní. Je-li $\frac{d^2 E_p}{d\,q^2}(q_0) < 0$, má E_p maximum a poloha je labilní. Je-li $\frac{d^2 E_p}{d\,q^2}(q_0) = 0$, nelze o typu bodu nic říci. Zde indefinitnost splývá se semidefinitností. Pro rozlišení případů by byly potřeba vyšší derivace. Tímto stavem se nebudeme zabývat.

LAGRANGEOVY ROVNICE

Bez odvození formulujeme tzv. **Lagrangeovy rovnice 2. druhu obyčejného typu** ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j\,, \quad j = 1,\ldots,n\,. \tag{13}$$

Protože rovnice jiného druhu a jiného typu nepoznáme, budeme další přívlastky vynechávat. Těchto rovnic je tolik, kolik má soustava stupňů volnosti. E_k je kinetická energie, q_j zobecněné souřadnice, $\dot{q}_j$ zobecněné rychlosti a Q_j zobecněné síly příslušející zobecněným souřadnicím q_j. Zobecněné souřadnice mohou být délky v metrech nebo úhly v radiánech.

Jsou-li to délky, jsou příslušné zobecněné rychlosti skutečnými rychlostmi v *m/s* a zobecněné síly skutečnými silami v *N*. Jsou-li zobecněné souřadnice úhly, jsou zobecněné rychlosti úhlovými rychlostmi v *rad/s* a zobecněnými silami momenty silových dvojic v *Nm*. Zobecněné síly určujeme z principu virtuálních prací podle výrazu

$$Q_j\, d\, q_j = \left(\sum_i F_i\, d\, x_i \right)_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{14}$$

kde F_i jsou statické akční síly na soustavu působící a x_i jsou takové fyzikální souřadnice, aby příslušná virtuální práce se vyčíslila běžným součinem (viz výše). Slovní formulace (14): Virtuální práce *j* - té zobecněné síly při virtuální změně příslušné zobecněné souřadnice je rovna součtu virtuálních prací všech statických akcí při tomto virtuálním nezávislém pohybu. Pro zkrácení variací q_j v (14) je třeba fyzikální souřadnice x_i vyjádřit prostřednictvím vazeb jako funkce zobecněných souřadnic q_j.

Poznámky: 1) Kinetická energie je obecně funkcí polohy i rychlosti. Je-li pouze funkcí rychlosti, jedná se o soustavu s konstantními převodovými poměry. I pro soustavu s jedním stupněm volnosti (zobecněná souřadnice *q*) je tedy obecně $E_k = E_k(q, \dot{q})$. Parciální derivace proto zůstávají v rovnici (13) i pro tento případ.

2) Zobecněné síly se konstruují podle (14) pouze pro statické pracovní síly F_i. Dynamické účinky jsou skryty v levé straně rovnic (13).

Jestliže statické akce jsou všechny konzervativní, existuje potenciální energie $E_p(q_1, \dots, q_n)$ (závisející na poloze) a platí

$$Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Lagrangeovy rovnice v tomto specielním případě mají tvar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{13´}$$

Stačí tedy najít kinetickou a potenciální energii a pohybové rovnice soustavy jsou pak už jen otázkou cvičení v derivování.