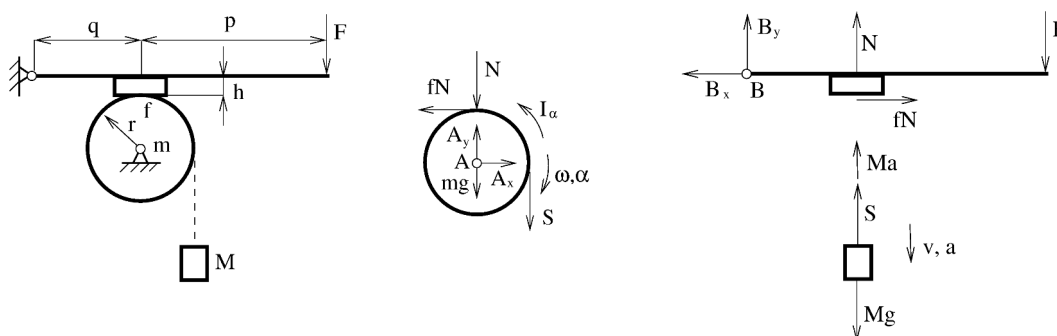


BUBEN SE ZAVĚŠENÝM BŘEMENEM BRZDĚNÝ ŠPALÍKOVOU BRZDOU

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Na buben tvaru homogenního válce hmotnosti m , poloměru r je navinuto (nehmotné) lano, k jehož konci je připojeno břemeno hmotnosti M , jež spouštíme do studny. K bubnu přiléhá páka se špalíkem, jež je v činné poloze vodorovná. Tloušťka špalíku je h , jeho umístění je dáno parametrem q (viz obr.). Při brždění bubnu tlačíme na páku v místě daném parametrem p (viz obr.) svislou silou F . Tíhu páky zanedbáme. Určete zrychlení a břemene, je-li koeficient tření mezi špalíkem a bubnem f .



ŘEŠENÍ

Protože v soustavě se nachází funkční člen se třením, je výhodnější řešit úlohu metodou uvolňování. Uvolněním bubnu (viz obr.) od rotační vazby k rámu připojíme reakce A_x, A_y , uvolněním od obecné vazby k páce (špalíku) připojíme normálovou reakci N a funkční třecí sílu o velikosti fN proti (relativnímu) pohybu a uvolněním od vazby lanem k břemenu připojíme sílu S v laně. Statickou akční silou je dále tíha mg působící ve středu bubnu. Je-li buben vyvážený, rotuje kolem hlavní centrální osy setrvačnosti a jediným setrvačným účinkem je setrvačná dvojice velikosti Ia proti smyslu kótování úhlového zrychlení. Pro vzniklou obecnou rovinnou silovou soustavu píšeme 3 podmínky (dynamické) rovnováhy, z nichž alespoň jedna bude momentová. Protože v rotační vazbě neuvažujeme tření, lze pro naše účely formulovat pouze podmínku, v níž se nevyskytují vnější reakce A_x, A_y . To je momentová podmínka k bodu A . Je tvaru

$$Ia + fNr - Sr = 0. \quad (1)$$

Uvolněním břemene od vazby lanem připojíme opačně orientovanou sílu S v laně. Akční silou je tíha břemene Mg . Protože břemeno se posouvá po svislici, je jediným setrvačným účinkem dynamická svislá síla velikosti Ma proti smyslu pohybu. Všechny zmíněné síly leží na společné (svislé) nositelce. Podmínka (dynamické) rovnováhy má proto tvar

$$Ma + S - Mg = 0. \quad (2)$$

Uvolněním páky od rotační vazby k rámu připojíme reakce B_x, B_y (viz obr.), uvolněním od obecné vazby k bubnu připojíme opačně orientovanou normálovou reakci N a příslušnou třecí sílu. Statickou akcí je pouze svislá síla F na konci páky, tíha páky byla zanedbána. Protože páka se nepohybuje, nepůsobí na ni žádné dynamické setrvačné účinky. I zde máme obecnou

rovinnou silovou soustavu. Formulujeme ovšem pouze ty podmínky, v nichž se nevyskytují vnější reakce B_x a B_y . To je momentová podmínka k bodu B , jež má zřejmě tvar

$$Nq + fNh - F(p+q) = 0. \quad (3)$$

V rovinách (1), (2), (3) vyloučíme vnitřní reakce N a S . Z (3) plyne

$$N = \frac{p+q}{q+fh} F.$$

Z (2) potom

$$S = M(g - a).$$

Dosazením těchto výrazů do (1) vzniká

$$Ia + fr \frac{p+q}{q+fh} F - Mr(g - a) = 0. \quad (4)$$

To je vlastní pohybová rovnice soustavy. Protože lano se z bubnu odvíjí bez prokluzu, platí mezi posuvem břemene a rotací bubnu kinematická podmínka valení $a = \frac{a}{r}$. Dosazením do (4) a osamostatněním zrychlení břemene a dostaneme po dílčí úpravě vztah

$$a = r^2 \frac{Mg(q+fh) - Ff(p+q)}{(I + Mr^2)(q+fh)}. \quad (5)$$

Jelikož buben je homogenní plný válec, je jeho osový moment setrvačnosti k ose symetrie (rotace) $I = \frac{1}{2}mr^2$. Dosazením do (5) máme pro zrychlení břemene

$$a = 2 \frac{Mg(q+fh) - Ff(p+q)}{(m+2M)(q+fh)},$$

odkud

$$a = \left[Mg - \frac{p+q}{q+fh} fF \right] \frac{2}{m+2M}. \quad (6)$$

Definujme nyní pomocí síly F fiktivní hmotnost m^* výrazem

$$F = m^* g. \quad (7)$$

Pomocí ní přepíšeme (6) do tvaru

$$\frac{a}{g} = \frac{2}{m+2M} \left[M - \frac{p+q}{q+fh} f m^* \right]. \quad (8)$$

Rozšířením zlomků výrazem $\frac{1}{M}$ a činitele v menšiteli výrazem $\frac{1}{q}$ a následným zavedením poměrů

$$u_1 = \frac{p}{q}; \quad u_2 = \frac{h}{q}; \quad w_1 = \frac{m^*}{M}; \quad w_2 = \frac{m}{M} \quad (8)$$

přepíšeme poslední vztah do konečného tvaru

$$\frac{a}{g} = \frac{2}{w_2 + 2} \left(1 - f w_1 \frac{1 + u_1}{1 + f u_2} \right). \quad (9)$$

Poznámka: Jestliže $F = 0$ (bez brždění bubnu) je podle (7) $m^* = 0$ a podle (8) i $w_1 = 0$. Pak podle (9) se břemeno rozbíhá se zrychlením $a_1 = \frac{2}{2 + w_2} g$. Necháme-li proto bez brždění tímto zrychlením rozběhnout břemeno po dobu t_1 , dosáhne rychlostí $v = a_1 t_1$ na dráze $x_1 = a_1 t_1^2 / 2$ (rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu). Jestliže poté začneme brzdit silou F způsobící podle (9) záporné zrychlení $a = -a_2 = konst.$, dojde k zastavení břemene za čas $t_2 = \frac{v}{a_2}$. Dráha uběhnutá v průběhu zastavování je $x_2 = \frac{a_2}{2} t_2^2 = \frac{v^2}{2a_2}$. Pro zvolené hodnoty poměrů u_1, u_2, w_2 , času t_1 a vhodně zvolený poměr w_1 (tedy sílu F) je znázorněna příslušná animace pohybu zařízení.