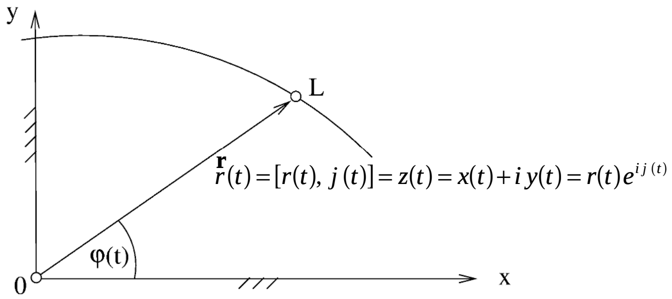
ZRYCHLENÍ KŘIVOČARÉHO POHYBU BODU V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH

ŘEŠENÍ

Zaveďme polární souřadnice $r,\ \varphi$ se středem O a hlavním směrem x. Bod L o souřadnicích $r(t),\ \varphi(t)$ nechť se pohybuje po libovolné rovinné křivce. Jeho polohový vektor $\vec{r}(t)$ ve vztahu ke středu O si lze představit jako komplexní číslo $z(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$, kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. U tohoto komplexního čísla je $x = \operatorname{Re} z$ a $y = \operatorname{Im} z$ (kolmá osa k hlavnímu směru x).



Podle definice vektoru rychlosti $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ dostáváme

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r\, e^{i\varphi}\right) = \frac{dr}{dt}e^{i\varphi} + r\,e^{i\varphi} \cdot i\frac{d\varphi}{dt}. \tag{1}$$

Protože $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ je činitel s jednotkovou absolutní hodnotou, vyjadřuje směr příslušné složky (argument komplexního čísla). Pro první sčítanec (1) je argument φ - stejný jako u polohového vektoru. Tento sčítanec vyjadřuje tzv. radiální složku rychlosti

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt}e^{i\varphi} \Rightarrow v_r = \frac{dr}{dt}.$$

Rovněž činitel $i\,e^{i\varphi} = e^{i\pi/2} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+\pi/2)}$ má jednotkovou absolutní hodnotu, a tedy vyjadřuje směr příslušné složky. Pro druhý sčítanec v (1) je tento směr $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$ - je tedy kolmý k polohovému vektoru. Tento sčítanec vyjadřuje tzv. transverzální složku rychlosti

$$\vec{v}_\tau = r\frac{d\varphi}{dt}i\,e^{i\varphi} \Rightarrow v_\tau = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Podle definice vektoru zrychlení $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ z (1) pak obdržíme

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\,e^{i\varphi}\right) + i\frac{d}{dt}\left(r\,\frac{d\varphi}{dt}\,e^{i\varphi}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\,e^{i\varphi} + \frac{dr}{dt}\,e^{i\varphi}\,i\frac{d\varphi}{dt} +$$

$$+ i\left[\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\,e^{i\varphi} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,e^{i\varphi} + r\,\frac{d\varphi}{dt}\,e^{i\varphi}\,i\frac{d\varphi}{dt}\right] = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]e^{i\varphi} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]i\,e^{i\varphi}.$$

Ze stejného důvodu jako výše pro rychlost je první sčítanec radiální a druhý transverzální složkou zrychlení. Pro velikosti platí

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dj}{dt}\right)^2, \tag{2}$$

$$a_t = 2\frac{dr}{dt}\frac{dj}{dt} + r\frac{d^2 j}{dt^2}. \tag{3}$$

Poznámka:

Znaménko mínus ve druhém sčítanci radiální složky vzniká uplatněním vztahu $i^2 = -1$.