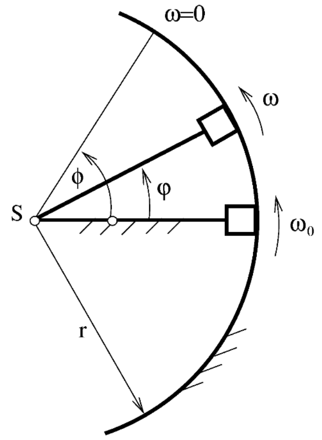
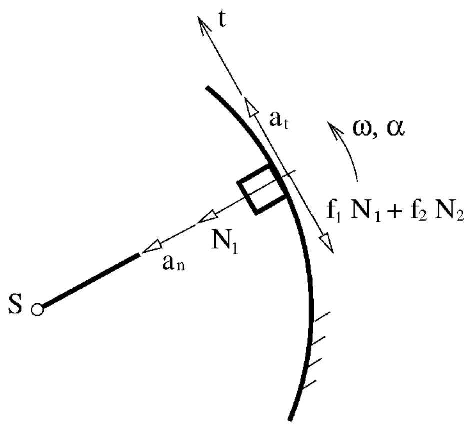
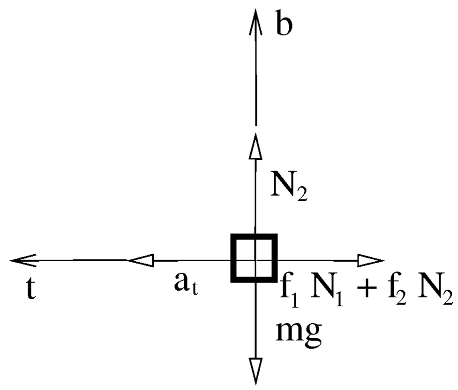
JEDNOSTRANNÉ NEHLADKÉ VAZBY BODU U DNA A STĚNY VÁLCOVÉ NÁDOBY POSAZENÉ NA VODOROVNÉ ROVINĚ

SPECIFIKACE PROBLÉMU

U dna válcové nádoby poloměru *r* přiléhajíc ke svislému plášti je položen bod a uveden do pohybu startovací úhlovou rychlostí w_0. Koeficient tření bodu o stěnu je f_1 o vodorovné dno nádoby f_2. Určete závislost $w(j)$ a úhel f průvodiče bodu v okamžiku jeho zastavení.







ŘEŠENÍ

Zakreslíme bod v obecné poloze dané úhlem j, úhlovou rychlostí w a úhlovým zrychlením a. Statickými účinky jsou tíha (směr binormály), reakce dna N_2 (směr binormály), reakce stěny N_1 (směr normály), a třecí síly od obou reakcí (směr tečny). Tečné zrychlení při kruhovém pohybu je $a_t = r\,a$ a normálové (dostředivé) $a_n = r\,w^2$. Na bod působí prostorová soustava sil. Pohybové rovnice mají tvar

směr tečny: $$m\,r\,a = -f_1 N_1 - f_2 N_2 \qquad (1)$$

směr normály: $$m\,r\,w^2 = N_1 \qquad (2)$$

směr binormály: $$0 = N_2 - m\,g \qquad (3)$$

Vlastní pohybovou rovnici dostaneme vyloučením reakcí. Dosazením z (2) a (3) do (1) obdržíme

$$m r a = -f_1 m r w^2 - f_2 m g ,$$

odkud

$$a = -f_1 w^2 - f_2 \frac{g}{r} . \tag{4}$$

jedná se o nelineární diferenciální rovnici druhého řádu. V časové oblasti ji lze řešit pouze numericky. Rovnici přepíšeme na tvar soustavy dvou rovnic prvního řádu jako

$$\frac{dj}{dt} = w ,$$

$$\frac{dw}{dt} = -f_1 w^2 - f_2 \frac{g}{r} ,$$

kterou lze numericky řešit (např. software MATLAB funkce ODE23) při počátečních podmínkách $j(0) = 0,\ w(0) = w_0$ pro neznámou vektorovou funkci $\mathbf{x}^T = [j, w]$.

V oblasti polohy lze rovnici (4) řešit metodou separace proměnných. Dosaďme $a = \frac{1}{2}\frac{dw^2}{dj}$ a upravme rovnici (4) na tvar

$$\frac{dw^2}{dj} = -2 f_1 \left(w^2 + \frac{f_2 g}{f_1 r} \right).$$

Označme $A = \frac{f_2}{f_1}\frac{g}{r}$ a separujme v předchozí rovnici proměnné. Dostaneme

$$\frac{dw^2}{w^2 + A} = -2 f_1 dj \quad . \tag{5}$$

Pro získání obecných závislostí nejprve integrujme mezi startovací a obecnou polohou. Dostaneme

$$\int_{w_0^2}^{w^2} \frac{dw^2}{w^2 + A} = -2 f_1 \int_0^j dg \quad .$$

Po integraci pak

$$\ln \left| w^2 + A \right|_{w_0^2}^{w^2} = -2 f_1 \, j \ ,$$

$$\ln \left| \frac{w^2 + A}{w_0^2 + A} \right| = -2 f_1 \, j \iff \frac{w^2 + A}{w_0^2 + A} = e^{-2 f_1 j} \ .$$

Odtud úpravou

$$w(j) = \sqrt{\left(w_0^2 + A\right) e^{-2 f_1 j} - A} = \sqrt{\left(w_0^2 + \frac{f_2}{f_1}\frac{g}{r}\right) e^{-2 f_1 j} - \frac{f_1}{f_2}\frac{g}{r}} \ .$$

Integrujeme-li (5) mezi startem a polohou zastavení, máme

$$\int_{w_0^2}^{0} \frac{dw^2}{w^2 + A} = -2 f_1 \int_0^{f} dj \quad .$$

Po integraci odtud

$$\ln\left|\frac{A}{w_0^2 + A}\right| = -2 f_1 \, f \Leftrightarrow f = \frac{1}{2 f_1} \ln\left(1 + \frac{f_1}{f_2}\frac{r}{g} w_0^2\right).$$