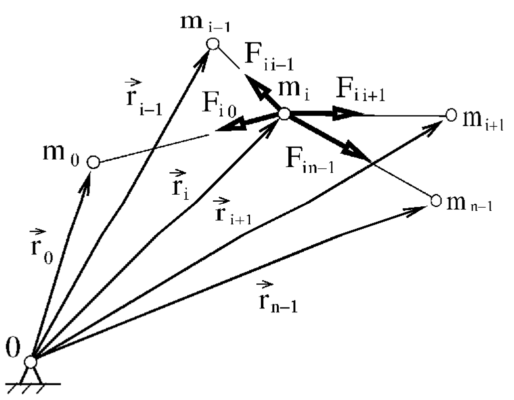
ÚLOHA VÍCE TĚLES V NEBESKÉ MECHANICE

SPECIFIKACE PROBLÉMU



Řešit úlohu n těles znamená nalézt pohyby (t.j. formulovat pohybové rovnice a nalézt jejich řešení) n hmotných bodů (resp. těles při zanedbání druhotné rotace), na které působí pouze vzájemné gravitační síly podle Newtonova gravitačního zákona.

Uvažujme n bodů o hmotnostech $m_0, ..., m_{n-1}$, které se obecně pohybují a nepohyblivý

počátek 0 inerciální souřadnicové soustavy (viz obr.) časově proměnné polohové vektory bodů vzhledem k 0 označme $\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1}$. Na každý bod $m_i\ (i = 0, ..., n-1)$ působí přitažlivé gravitační síly $\vec{F}_{ij}\ (j = 0, ..., i-1, i+1, ..., n-1)$ ostatních bodů.

ŘEŠENÍ

Označme polohový vektor j-tého bodu vzhledem k i-tému jako $\vec{r}_{ij}$. Pak zřejmě je

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i\,. \tag{1}$$

Podle vektorového tvaru Newtonova gravitačního zákona (viz Úloha dvou těles) pro síly $\vec{F}_{ij}$ platí $\vec{F}_{ij} = k\,\dfrac{m_i\ m_j}{r_{ij}^3}\,\vec{r}_{ij}$, kde k je univerzální gravitační konstanta a r_{ij} je velikost vektoru $\vec{r}_{ij}$ (vzdálenost bodů m_i a m_j). Pohybová (vektorová) rovnice i-tého bodu má proto tvar

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} \vec{F}_{ij} = k\, m_i \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} m_j\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad i = 0, ..., n-1.$$

Po krácení m_i dostáváme vztah pro vektor zrychlení i-tého bodu na základě poloh a hmotností ostatních bodů ve tvaru

$$\vec{a}_i = k \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} m_j\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\ , \quad i = 0, ..., n-1\,. \tag{2}$$

Jedná se o 3n nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé $\vec{r}_i(t) = [x_i(t),\ y_i(t),\ z_i(t)]$, $i = 0, ..., n-1$ funkce závislosti polohy i-tého bodu na čase např. ve vhodně zvolených kartézských souřadnicích x, y, z s počátkem v bodě 0. Rovnicím (2) říkáme pohybové rovnice pro úlohu n těles v absolutních souřadnicích.

Nechť bod (těleso) m_0 je významné např. tím, že má ze všech největší hmotnost (Slunce pro planetární soustavu; Země pro Měsíc a další umělá tělesa v gravitačním poli Země).

Odvodíme pohybové rovnice, pro pozorovatele na pohybujícím se bodě m_0. Označme $\vec{r}_i = \vec{r}_{0i}$ podle (1) polohový vektor bodu m_i vůči m_0. Pišme rovnice (2) nejprve pro $i = 0$ a poté pro ostatní ***i***. Dostaneme

$$\ddot{\vec{r}}_0 = k \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_{0j}}{r_{0j}^3} = k \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\,, \tag{3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = k \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} = k\left[m_0 \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}^3} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right] = k\left[-m_0 \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right]. \tag{4}$$

Ve (4) jsme nejprve od n sčítanců oddělili sčítance pro $j = 0$ a poté jsme uvážili, že $\vec{r}_{i0} = -\vec{r}_{0i} = -\vec{r}_i$ podle (1). Odečtením rovnice (3) od (4) dostaneme

$$\ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_0 = \ddot{\vec{r}}_{i0} = \ddot{\vec{r}}_i = k\left[-m_0 \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\right]. \tag{5}$$

Zde jsme opět využili (1) spolu se zavedením jednoindexových vektorů $\vec{r}_i$. Vydělme z posledního sčítance zvlášť ***i***-tý člen. Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} = m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\,.$$

První sčítanec této rovnosti sdružíme s prvním sčítancem pravé strany v (5) a druhý sčítanec podobně s druhým v (5). Získáme (5) ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}}_i = k\left[-(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right)\right]$$

odkud

$$\ddot{\vec{r}}_i + k\,(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = k \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad i = 1, \ldots, n-1\,. \tag{6}$$

Jedná se o $3\cdot(n-1)$ diferenciálních rovnic 2. řádu pro neznámé $\vec{r}_i(t) = [x_i(t), h_i(t), z_i(t)]$, $i = 1, \ldots, n-1$ funkce závislosti relativní polohy *i*-tého bodu vůči (pohybujícímu se) bodu m_0 např. ve zvolených kartézských souřadnicích x_i, h_i, z_i s počátkem v m_0. Těmto rovnicím říkáme pohybové rovnice pro úlohu *n* těles v relativních souřadnicích. Všimněme si, že levá strana (6) (anulovaná) by byla pohybovou rovnicí pro problém dvou těles m_0 a m_i (keplerovskou). Pravá strana v (6) vyjadřuje tzv. rušivé zrychlení ostatních $n-2$ těles.Speciální případ pro úlohu 3 těles: Rovnice (6) pro $i = 1$ a $i = 2$ pak dává

$$\ddot{\vec{r}}_1 + k\,(m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = k\ m_2 \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right)\,,$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + k\,(m_0 + m_2)\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = k\ m_1\left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) . \tag{7}$$

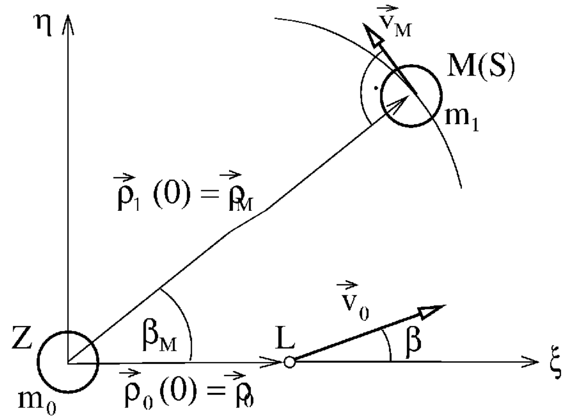
.Pro praxi důležitý je případ tzv. omezené úlohy tří těles, kdy předpokládáme, že $m_2 \to 0$ (uměle vyrobené kosmické těleso vůči Zemi a Měsíci, event. Slunci zanedbatelné hmotnosti). Pak (7) přejde do tvaru

$$\ddot{\vec{r}}_1 + k\,(m_0 + m_1)\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = 0\ ,$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + k\,m_0\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = k\ m_1\left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) . \tag{8}$$

První rovnice (8) je pak keplerovská rovnice pro těleso m_1 při umístění pozorovatele do centra m_0. Druhá rovnice (8) je rovnice pro minitělísko ovlivněná rušivým zrychlením tělesa m_1 na pravé straně.

Nejpoužívanější matematický model (8) je pro těleso m_0 coby Zemi, těleso m_1 coby Měsíc (eventuálně Slunce) a tělísko m_2 coby umělá družice (kosmická raketa). Jestliže ji navedeme do roviny dráhy Měsíce kolem Země, bude se v této rovině trvale pohybovat, protože se zachovává celkový moment hybnosti ke středu hmotnosti soustavy. Model (8) pak tvoří dvě diferenciální rovnice 2. řádu pro neznámou vektorovou funkci $\vec{r}_1(t) = [x_1(t), h_1(t)]$, popisující polohu



tělesa m_1 (Měsíce) v rovině pohybu $\widehat{xh}$ dané středem centra (Země) a naváděcími rychlostmi a neznámou vektorovou funkci $\vec{r}_2(t) = [x_2(t), h_2(t)]$ popisující polohu tělesa m_2 (družice) v téže rovině, vždy vůči středu centra (Země). Osu x souřadnicové soustavy volíme tak, aby procházela bodem navedení tělesa m_2 (viz obr.). Zřejmě je

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = [x_1 - x_2, h_1 - h_2]\,,$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + h_i^2}\,,\quad i = 1, 2,\quad r_{21} = r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (h_1 - h_2)^2}\ .$$

Vektorové diferenciální rovnice (8) pak přejdou do (dvojnásobného počtu) skalárních diferenciálních rovnic tvaru

$$\ddot{x}_1 + k\,(m_0 + m_1)\frac{x_1}{\sqrt{\left(x_1^2 + h_1^2\right)^3}} = 0\,,$$

$$\ddot{h}_1 + k\,(m_0 + m_1)\frac{h_1}{\sqrt{\left(x_1^2 + h_1^2\right)^3}} = 0\,,$$

$$\ddot{x}_2 + k\, m_0 \frac{x_2}{\sqrt{\left(x_2^2 + h_2^2\right)^3}} = k\, m_1 \left\{ \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\left[(x_1 - x_2)^2 + (h_1 - h_2)^2\right]^3}} - \frac{x_1}{\sqrt{\left(x_1^2 + h_1^2\right)^3}} \right\},$$

$$\ddot{h}_2 + k\, m_0 \frac{h_2}{\sqrt{\left(x_2^2 + h_2^2\right)^3}} = k\, m_1 \left\{ \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{\left[(x_1 - x_2)^2 + (h_1 - h_2)^2\right]^3}} - \frac{h_1}{\sqrt{\left(x_1^2 + h_1^2\right)^3}} \right\}.$$

Při označení funkcí $x_1 = x_1$, $h_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $h_2 = x_4$ a zavedení funkcí $x_{4+i} = \dot{x}_i$, $i = 1, ..., 4$, lze soustavu čtyř rovnic druhého řádu převést na soustavu osmi rovnic prvního řádu tvaru

$$\dot{x}_i = x_{4+i}\,,$$

$$\dot{x}_{2+i} = x_{6+i}\,,$$

$$\dot{x}_{4+i} = -k\,(m_0 - m_1) \frac{x_i}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}}\,,$$

$$\dot{x}_{6+i} = -k\, m_0 \frac{x_{2+i}}{\sqrt{\left(x_3^2 + x_4^2\right)^3}} + k\, m_1 \left\{ \frac{x_i - x_{2+i}}{\sqrt{\left[(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2\right]^3}} - \frac{x_i}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}} \right\}, \quad i = 1, 2\,.$$

Tento tvar lze napsat formálně vektorově jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\,(\mathbf{x})\,.$$

S tvarem funkce $\mathbf{f}\,(\mathbf{x}) = [\, f_1\,(\mathbf{x}), ..., \; f_8\,(\mathbf{x})]^T$ vstoupíme do software v MATLABu a pro řešení soustavy diferenciálních rovnic využijeme procedury ODE23 nebo ODE45. Počáteční podmínky $\mathbf{x}(0) = [x(0), ..., x_8\,(0)]^T$ budou následující:

1. Polohové pro těleso m_1 (Měsíc)

$$x_1(0) = x_1(0) = r_M \cos b_M\,; \quad x_2(0) = h_1(0) = r_M \sin b_M\,.$$

   Parametry r_M a b_M je určena poloha Měsíce (tělesa m_1) v čase $t = 0$ - viz obr. (tedy v okamžiku navedení družice m_2)

2. Polohové pro těleso m_2

$$x_3(0) = x_2(0) = r_0\,; \quad x_4(0) = h_2(0) = 0\,.$$

   Parametrem r_0 je určena vzdálenost bodu navedení družice od středu centra (Země)

3. Rychlostní pro těleso m_1

$$x_5(0) = \dot{x}_1(0) = v_M \cos\left(\frac{p}{2} + b_M\right); \quad x_6(0) = \dot{h}_1(0) = v_M \sin\left(\frac{p}{2} + b_M\right).$$

   Parametrem v_M je určena (okamžitá) rychlost Měsíce (tělesa m_1) vůči centru. Sčítanec $\frac{p}{2}$ v argumentu goniometrických funkcí znamená, že rychlost je (přibližně) kolmá na průvodič.

4. Rychlostní pro těleso m_2

$$x_7(0) = \dot{x}_2(0) = v_0 \cos b \; ; \quad x_8(0) = \dot{h}_2(0) = v_0 \sin b \; .$$

Parametry v_0 a b je určen vektor $\vec{v}_0$ naváděcí rychlosti družice (tělesa m_2).

Poznámky:

1) Má-li být simulace reálná, je časová základní jednotka (sekunda) příliš malá. Zavedeme proto nezávisle proměnnou t jako $t = \dfrac{t}{t_k}$, kde t je původní časová proměnná v sekundách a t_k konstanta udávající kolik sekund mají nové časové jednotky. Např. je-li t v hodinách, je $t_k = 3600$, je-li t ve dnech, je $t_k = 86400$. Pro každou diferencovatelnou funkci *f* potom platí

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{1}{t_k} \frac{df}{dt} \; .$$

Místo časových derivací $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ do levých stran diferenciálních rovnic dosazujeme

$$\frac{1}{t_k} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t_k} x_i' \; .$$

2) Vytkneme-li na pravých stranách diferenciálních rovnic veličinu $k\, m_0$, objeví se ve druhých sčítancích poměr hmot $\dfrac{m_1}{m_0} = p$. Pro modelovou úlohu Země – Měsíc – malé těleso je $\dfrac{m_1}{m_0} = 0{,}0123$ (Měsíc je 81,3 krát lehčí než Země). Parametr $K = k\, m_0$ má pro Zemi hodnotu $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} = 3{,}98 \cdot 10^{14}\, m^3 / s^2 = 3{,}98 \cdot 10^{-4}\, Mm^3 / s^2$. Zavedeme-li konstantu K číselnou hodnotou $3{,}98 \cdot 10^{-4}$, vyjadřujeme vzdálenosti (polohové souřadnice, jež jsou výsledkem řešení soustavy diferenciálních rovnic) v megametrech.

3) Hodnoty r_M a v_M vyskytující se v počátečních podmínkách pro těleso m_1 (Měsíc) lze volit (pokud neznáme přesnější hodnoty) jako střední vzdálenost Země-Měsíc a střední rychlost pohybu Měsíce kolem Země pro případ kruhové dráhy. Tyto parametry jsou $r_M = 384\, Mm,\ v_M = 1{,}022 \cdot 10^{-3}\, Mm / s$.

4) Pro případ modelu Slunce-Země-malé těleso by bylo $p = 3 \cdot 10^{-6}$ (Slunce je 330 000 krát hmotnější než Země); $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 330000 = 1{,}34 \cdot 10^{20}\ m^3 / s^2 =$ $= 134\, Mm^3 / s^2$. Počáteční podmínky r_M a v_M pro Zemi lze volit opět ve tvaru střední vzdálenosti Slunce-Země a střední rychlosti Země kolem Slunce pro případ její kruhové dráhy. Pak je $r_M = 149600\, Mm,\ v_M = 0{,}0298\ Mm / s$.