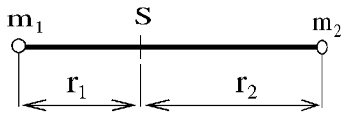
ÚLOHA DVOU TĚLES V JEJICH GRAVITAČNÍM POLI

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Předpoklad centrálnosti gravitačního působení centra (Slunce v případě planet či Země v případě družic) je v míře popsané v souboru „Pohyb v centrálním silovém poli“ možno použít pouze v případě, že gravitační síla tělesa hmotnosti m neovlivní pohyb centra hmotnosti M, čili jen v případě $M >> m$. Není-li tento předpoklad splněn, jedná se o tzv. úlohu dvou těles. Na každé těleso působí pouze gravitační síla vyvolaná druhým tělesem. Tyto dvě síly lze z hlediska soustavy dvou těles (hmotných bodů) chápat jako vnitřní síly (jsou stejně velké, opačně orientované). Za předpokladu zanedbání účinků ostatních těles, nepůsobí na tuto soustavu žádné vnější síly. Podle druhé věty o pohybu středu hmotnosti (soustavy hmotných bodů) se zmíněný střed hmotnosti pohybuje nejvýše rovnoměrně přímočaře (bez zrychlení). Tento stav je z hlediska dynamiky stejný, jako by střed hmotnosti byl v klidu. Každý bod (těleso) je tedy zatížen silou, která trvale prochází (klidným) středem hmotnosti obou bodů (těles). Podle výsledků řešení úlohy pohybu v centrálním poli sil se obě tělesa pohybují kolem jejich středu hmotnosti tak, že jsou splněny Keplerovy zákony.

ŘEŠENÍ

Ze statiky víme, že střed hmotnosti soustavy hmotných bodů o hmotnostech m_1, m_2 leží na jejich spojnici ve vzdálenostech r_1, r_2 (viz obr.), pro které platí $\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_1}{m_2}$.

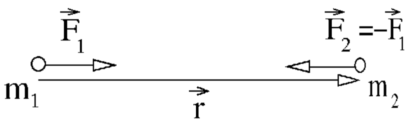


Jestliže vzájemná vzdálenost bodů je $r_1 + r_2 = r$ a poměr hmotností $\frac{m_1}{m_2} = p$, dostaneme řešením soustavy těchto dvou rovnic pro vzdálenosti středu hmotnosti vztah

$$r_1 = \frac{1}{p+1} r \, ; \quad r_2 = \frac{p}{p+1} r \, . \tag{1}$$

Užijeme-li těchto vztahů pro model dvou těles Slunce ($= m_1$) + planeta ($= m_2$), je pro nejhmotnější planetu sluneční soustavy, tedy pro Jupitera, $p = 1046$. Těžiště soustavy Slunce-Jupiter leží tedy od středu Slunce méně než tisícinu vzdálenosti Slunce Jupiter. Pro Zemi je poměr p ještě daleko větší (cca 332 500). Pro pozorovatele na inerciální soustavě spojené se středem hmotnosti soustavy Slunce-planeta, by se tedy Slunce pohybovalo kolem bodu, který leží nad jeho povrchem právě jen v případě Jupitera. Zde je totiž $r = 7{,}8 \cdot 10^8\, km$, takže $r_1 = 7{,}45 \cdot 10^5\, km$. Poloměr Slunce přitom činí $6{,}99 \cdot 10^5\, km$. Pro případ soustavy Slunce-Země je $r = 1{,}5 \cdot 10^8\, km$, takže $r_1 = 4520\, km$. Užijeme-li vztahů (1) pro soustavu Země-Měsíc, kam v tomto případě dosadíme $r = 3{,}84 \cdot 10^5\, km$ a $p = 81{,}5$. Vychází pak $r_1 = 4655\, km$. Protože poloměr Země je 6378 *km*, leží těžiště soustavy Země-Měsíc pod povrchem Země.

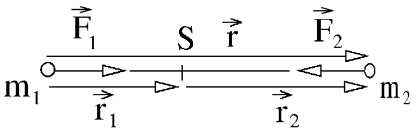
Popis pohybu obou těles v inerciální soustavě spojené se středem hmotnosti má pro praxi menší význam než popis pohybu druhého tělesa v soustavě pevně spojené s jedním tělesem (např. s tělesem výrazně větší hmotnosti, kterému můžeme i nadále říkat centrum). Než odvodíme příslušnou pohybovou rovnici, ukážeme jak lze Newtonův gravitační zákon formulovat vektorově. Mějme dva hmotné body hmotností m_1, m_2. Poloha m_2 vůči m_1 nechť je popsána polohovým vektorem $\vec{r}$. Na oba body působí gravitační síly $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ o velikostech $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = k\,\dfrac{m_1\, m_2}{r^2}$ (Newtonův gravitační zákon). Máme-li k silám kromě



velikosti přidat i směr (a smysl ošipkování), přenásobíme gravitační zákon jednotkovým vektorem směru (a smyslu) vektoru $\vec{r}$, tedy vektorem $\dfrac{\vec{r}}{r}$. Pak síly lze psát vektorově ve tvaru

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = k\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = k\,\frac{m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,. \tag{2}$$

Tohoto vektorového tvaru Newtonova gravitačního zákona využijeme pro další odvození pohybové rovnice pro počátek v pohybujícím se centru. Uvažujeme opět dva hmotné body



hmotností m_1, m_2 a jejich střed hmotnosti *S* určený polohovými vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ (viz obr.). Pro polohový vektor bodu m_2 vůči m_1 pak platí zřejmě vektorový vztah

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2\,. \tag{3}$$

Pohybová rovnice pro těleso m_1 (vzhledem ke klidnému bodu *S*) má podle (2) zřejmě tvar

$$-m_1\,\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = k\,\frac{m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,. \tag{4}$$

Analogická rovnice pro těleso m_2 je tvar

$$m_2\,\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_2 = -k\,\frac{m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,. \tag{5}$$

První rovnici přenásobíme m_2 a druhou m_1. Dostaneme

$$m_1\, m_2\,\ddot{\vec{r}}_1 = -m_2\, k\,\frac{m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,,$$

$$m_1\, m_2\,\ddot{\vec{r}}_2 = -m_1\, k\,\frac{m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,.$$

Sečtením těchto rovnic s uvažováním vztahu (3) získáme

$$m_1\, m_2\,\ddot{\vec{r}} = -(m_1 + m_2)\, k\, m_1\, m_2\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

Rozšiřme tuto rovnici výrazem $\dfrac{1}{m_1 + m_2}$ (a ničím nekraťme). Vznikne

$$\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\,\ddot{\vec{r}} = -(m_1 + m_2)\,\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, k\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{6}$$

Zaveďme hmotnost m výrazem

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{7}$$

Pak (6) přepíšeme na

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{-k\,(m_1 + m_2)\,m}{r^3}\,\mathbf{r}\,.$$

To je vektorová pohybová rovnice hmoty m_2 vůči (pohybující se) hmotě m_1. Pravá strana je Newtonovou gravitační silou působící mezi hmotnostmi $m_1 + m_2$ (centrum) a m dané vztahem (7) („přídavná" hmotnost). Pro pozorovatele spojeného s hmotou m_1 se proto hmota m_2 pohybuje „keplerovsky" s výše popsanou modifikací hmotností. Trajektorií je proto opět kuželosečka s patřičně modifikovaným parametrem, numerickou výstředností i polohou pericentra vůči bodu navedení. Při odvozování III. Keplerova zákona jsme dospěli ke vztahu

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4p^2}{k\,M} = konst.\,, \tag{8}$$

kde T je doba oběhu tělesa kolem centra o hmotnosti M po eliptické dráze o velké poloose a. Při modifikaci na pozorovatele nacházejícího se na (pohybujícím se) centru dojde k modifikaci $M \to M + m$, kde m je hmotnost „menšího" tělesa. Výraz (8) pak dostane tvar

$$\frac{T^2\,(M + m)}{a^3} = \frac{4p^2}{k} = konst.$$

Pro dva objekty pohybující se kolem téhož centra pak platí

$$\frac{T_1^2\,(M + m_1)}{a_1^3} = \frac{T_2^2\,(M + m_2)}{a_2^3} \Leftrightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \frac{M + m_1}{M + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3, \tag{9}$$

což je zobecnění III. Keplerova zákona.