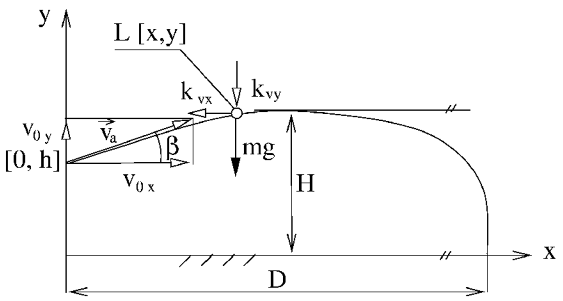
POHYB BODU V HOMOGENNÍM GRAVITAČNÍM POLI S ODPOREM LINEÁRNĚ ZÁVISLÝM NA RYCHLOSTI

SPECIFIKACE PROBLÉMU



Z výšky h nad povrchem je vystřelen bod hmotnosti m startovací rychlostí v_0 pod elevačním úhlem b. Odpor vzduchu aproximujeme silou lineárně závisející na rychlosti pohybu s konstantou úměrnosti $k\ [kg\, s^{-1}]$. Popíšeme pohyb bodu a určíme maximální výšku výstupu *H* a délku doletu *D*. V obecné poloze *L* o souřadnicích *x, y* (souřadnicová soustava je osou *x* na povrchu Země a osa *y* prochází startovacím bodem) působí na bod tíha *mg* a složky odporové síly lineárně úměrné příslušným složkám rychlosti rovněž s konstantou *k*.

ŘEŠENÍ

Pohybové rovnice tedy mají tvar

$$m\, a_x = -k\, v_x\,, \tag{1}$$

$$m\, a_y = -mg - k\, v_y\,, \tag{2}$$

kde a_x, a_y jsou složky zrychlení orientované kladně vpravo a nahoru. Polohové počáteční podmínky jsou

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h \tag{3}$$

a rychlostní

$$v_x(0) = v_{x0} = v_0\, \cos b\,, \quad v_y(0) = v_{y0} = v_0\, \sin b\,. \tag{4}$$

Označíme-li $\bar{k} = \dfrac{k}{m}$ přepíšeme pohybovou rovnici (1) jako

$$\frac{dv_x}{dt} = -\bar{k}\, v_x\,.$$

Separací proměnných s naznačením integrace mezi rychlostní počáteční podmínkou a obecným stavem odtud máme

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{d\, v_x}{v_x} = -\bar{k} \int_0^t dt\,.$$

Provedením integrace

$$\ln\left|\frac{v_x}{v_{x0}}\right| = -\bar{k}\, t \Leftrightarrow v_x(t) = v_{x0}\, e^{-\bar{k}\, t}\,. \tag{5}$$

Dosazením $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, separací proměnných a naznačením integrace mezi polohovou počáteční podmínkou a obecným stavem pak máme

$$\int_0^x dx = v_{x0} \int_0^t e^{-\bar{k}\,t}\, dt\,.$$

Provedením integrace

$$x(t) = \frac{v_{x0}}{\bar{k}}\left(1 - e^{-\bar{k}\,t}\right). \qquad (6)$$

Pohybovou rovnici (2) přepíšeme podle definice $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ do tvaru

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \bar{k}\; v_y\,.$$

Separací proměnných s naznačením integrace mezi rychlostní počáteční podmínkou a obecným stavem vzniká

$$\int_{v_{y0}}^{v_y} \frac{d\,v_y}{g + \bar{k}\,v_y} = -\int_0^t dt\,.$$

Provedením integrace

$$\frac{1}{\bar{k}} \ln\left|\frac{g + \bar{k}\,v_y}{g + \bar{k}\,v_{y0}}\right| = -t \Leftrightarrow v_y\,(t) = \frac{1}{\bar{k}}\left[\left(g + \bar{k}\;\,v_{y0}\right)e^{-\bar{k}\,t} - g\right]. \qquad (7)$$

Dosazením $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, separací proměnných a naznačením integrace mezi polohovou počáteční podmínkou a obecným stavem dostaneme

$$\int_h^y dy = \frac{1}{\bar{k}} \int_0^t \left[\left(g + \bar{k}\;\,v_{y0}\right)e^{-\bar{k}\,t} - g\right] dt\,.$$

Provedením integrace

$$y\,(t) = h + \frac{1}{\bar{k}}\left[\frac{g + \bar{k}\,v_{y0}}{\bar{k}}\left(1 - e^{-\bar{k}\,t}\right) - gt\right]. \qquad (8)$$

Rovnice (5) ÷ (8) popisují časové závislosti polohy a rychlosti bodu. Rovnice (6) a (8) tvoří parametrické rovnice balistické křivky ve zvoleném souřadnicovém systému. Parametrem je čas *t*. Jeho vyloučením získáme rovnici balistické křivky (obvyklou v analytické geometrii). Z (6) plyne

$$\frac{1 - e^{-\bar{k}t}}{\bar{k}} = \frac{x}{v_{x0}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\bar{k}}\,\ln\left|1 - \frac{\bar{k}x}{v_{x0}}\right|.$$

Dosazením do (8) získáme

$$y = h + \frac{1}{\bar{k}}\left[\left(g + \bar{k}\,v_{y0}\right)\frac{x}{v_{x0}} + \frac{g}{\bar{k}} \ln\left|1 - \frac{\bar{k}x}{v_{x0}}\right|\right], \qquad (9)$$

což je analyticko-geometrická rovnice balistické křivky. Bod maximální výšky výstupu je charakterizován vektorem rychlosti vodorovného směru. Podmínkou dosažení tohoto bodu je $v_y = 0$. Podle (7)

$$\left(g + \bar{k}\, v_{y0}\right) e^{-\bar{k}\, t_1} = g\,,$$

kde t_1 je čas dosažení tohoto bodu. Odtud

$$t_1 = \frac{1}{\bar{k}} \ln \frac{g}{g + \bar{k}\, v_{y0}}\,. \tag{10}$$

Zřejmě maximální výška výstupu je *y*-ovou souřadnicí bodu křivky pro $t = t_1$. Dosazením (10) do (8)

$$H = y(t_1) = h + \frac{1}{\bar{k}} \left[v_{y0} + \frac{g}{\bar{k}} \ln \frac{g}{g + \bar{k}\, v_{y0}} \right]. \tag{11}$$

Bod dopadu na povrch je charakterizován podmínkou $y = 0$. Dálka doletu D je pak *x*-ová souřadnice tohoto bodu. Vzhledem k (9) je řešením rovnice

$$h + \frac{1}{\bar{k}} \left[\left(g + \bar{k}\, v_{y0}\right) \frac{D}{v_{x0}} + \frac{g}{\bar{k}} \ln \left| 1 - \frac{\bar{k}\, D}{v_{x0}} \right| \right] = 0\,. \tag{12}$$

Jedná se o transcendentní rovnici, v níž neznámá D je jednak v lineárním členu a jednak jako argument logaritmu. V uzavřeném tvaru analyticky není tato rovnice řešitelná. Při grafickém řešení by se jednalo o nalezení *x*-ové souřadnice průsečíku lineární a logaritmické křivky. Podle (12) platí

$$-\left[\bar{k}\, h + \left(g + \bar{k}\, v_{y0}\right) \frac{D}{v_{x0}} \right] = \frac{g}{\bar{k}^2} \ln \left| 1 - \frac{\bar{k}\, D}{v_{x0}} \right|.$$

Osamostatněním D z pravé strany odtud

$$D = \frac{v_{x0}}{\bar{k}} \left[1 - \exp\left[-\frac{\bar{k}^3 h}{g} - \bar{k}^2 \left(1 + \frac{\bar{k}}{g} v_{y0} \right) \frac{D}{v_{x0}} \right] \right].$$

Tuto rovnici lze chápat jako iterační předpis, pomocí něhož z hodnoty D nižší iterace vyčíslíme D iterace vyšší. Pokud proces konverguje, zastavíme jej v případě, že se dvě po sobě jedoucí iterace liší o méně než předem zadaná relativní chyba. Iteraci před zastavením prohlásíme za řešení maximálního doletu.

Poznámka: Pro $k = 0$ (šikmý vrh bez odporu prostředí) za jinak stejných podmínek musíme úlohu řešit analogicky, leč od samého počátku znovu. Pohybové rovnice (jako příslušné modifikace (1) a (2)) mají tvar

$$a_x = 0\,, \qquad a_y = -g\,.$$

Jejich první integrací získáme

$$v_x(t) = v_{x0}\,, \qquad v_y(t) = v_{y0} - g\,t \tag{13}$$

a druhou integrací

$$x(t) = v_{x0}\, t, \qquad y(t) = h + v_{y0}\, t - \frac{g}{2} t^2 . \tag{14}$$

Rovnice (14) jsou parametrickými rovnicemi balistické křivky. Parametrem je čas *t*. Jeho vyloučením získáme

$$y(x) = h + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}\, x - \frac{g}{2v_{x0}^2} x^2 , \tag{15}$$

což je rovnice paraboly. Podmínka dosažení maximální výšky výstupu je $v_y = 0$. Jestliže t_1 je čas dosažení tohoto bodu, je podle (13)

$$t_1 = \frac{v_{y0}}{g} .$$

Pak zřejmě $H = y(t_1)$. Dosazením do (14) získáme po úpravě

$$H = h + \frac{v_{y0}^2}{2g} . \tag{16}$$

Pro dolet, podobně jako výše platí $y(D) = 0$, takže podle (15)

$$h + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}\, D - \frac{g}{2v_{x0}^2}\, D^2 = 0 .$$

Příslušný dolet jest kladný kořen této kvadratické rovnice. Je tedy

$$D = \frac{v_{x0}}{g}\left(v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 + 2gh}\right). \tag{17}$$

Záporný kořen se znaménkem mínus u druhého sčítance závorky formálně určuje průsečík paraboly s osou *x* vlevo od startu a nemá fyzikální význam.