POHYB BODU V CENTRÁLNÍM POLI SIL

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Centrální silové pole je takové pole sil, kdy v libovolném bodě prostoru nositelka síly působící na pohybující se bod prochází pevným bodem v prostoru (tzv. centrem silového pole)

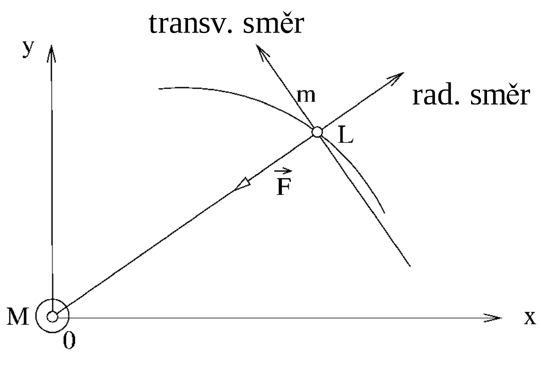
Poznámka: Známou aplikací tohoto druhu pohybu je pohyb planet kolem Slunce resp. družice kolem Země. Střed velmi hmotného tělesa (Slunce v případě planet, resp. Země v případě družic) je centrem ve smyslu předchozí definice, kterým stále prochází nositelka gravitační síly na „bod" působící. Velikost gravitační síly F je podle Newtonova gravitačního zákona rovna $F = k\dfrac{Mm}{r^2}$, kde M je hmotnost centra, m hmotnost bodu a r vzdálenost bodu od středu centra. Veličina $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\left[m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}\right]$ je univerzální gravitační konstanta.

ŘEŠENÍ

Druhá impulzová věta tvrdí, že časová derivace momentu hybnosti pohybujícího se bodu k pevnému počátku je rovna momentu výslednice sil na bod působících k témuž počátku. Jestliže za pevný počátek bereme centrum centrálního pole sil, je moment výslednice k němu nulový. Podle impulzové věty musí moment hybnosti k němu být konstantní. Vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu určenou polohovým vektorem a vektorem rychlosti bodu. Tato rovina tedy musí být stálá (rovna rovině určené naváděcí polohou a rychlostí bodu). Pohyb v centrálním poli sil je proto rovinným pohybem.

Zaveďme do této roviny pohybu polární souřadnice se středem v centru silového pole a s hlavním směrem ve směru k bodu navedení (polohová počáteční podmínka). Pohybová rovnice bodu ve vektorovém tvaru má obecně tvar

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i\ . \tag{1}$$



Vzhledem k definici centrálního pole a k zavedení polárních souřadnic do transverzálního směru žádná síla nepůsobí. Proto (1) má tvar $ma_t = 0$. Protože $m \neq 0$ dostáváme vzhledem k vyjádření transverzální složky zrychlení výraz

$$2\frac{dr}{dt}\frac{dj}{dt} + r\frac{d^2j}{dt^2} = 0\,. \tag{2}$$

Protože

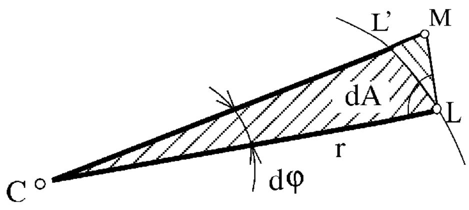
$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dj}{dt}\right) = 2r\frac{dr}{dt}\frac{dj}{dt} + r^2\frac{d^2j}{dt^2} = r\left(2\frac{dr}{dt}\frac{dj}{dt} + r\frac{d^2j}{dt^2}\right), \tag{3}$$

je podle (2) pravá strana (3) nulová. Výraz

$$2w = r^2 \; \frac{dj}{dt} \tag{4}$$

je proto konstantní.

Veličina $w = \frac{r^2}{2} \frac{dj}{dt}$ se nazývá plošná rychlost (vzhledem k centru). Její definice je



$w = \frac{dA}{dt} [m^2 / s]$, kde dA je plocha opsaná průvodičem bodu *L* za čas *dt*. Tuto plochu lze počítat (až na diferenciálně malou veličinu druhého řádu) jako plochu trojúhelníka *CLM*, jenž má jednu odvěsnu délky *r* a druhou délky $r dj$ (jako kruhový oblouček na poloměru *r* příslušející k úhlu dj). Plochu *dA* určíme jako plochu tohoto trojúhelníka, tedy $dA = \frac{1}{2} r \cdot r dj$. Odtud vztah (4) ihned plyne.

Poznámka:

1) Z řešení pohybové rovnice bodu (1) v transverzálním směru byla odvozena poučka: Plošná rychlost bodu při pohybu v centrálním poli sil je konstantní. Tento fakt je znám jako druhý Keplerův zákon.
2) Všimněme si, že pro odvození tohoto zákona nebylo potřeba znát konkrétní tvar funkce velikosti síly na vzdálenosti od centra. Tento zákon by platil pro jakoukoliv závislost.

Formulujme nyní pohybovou rovnici (1) do radiálního směru. Zde (v záporně orientovaném radiálním směru) působí Newtonova gravitační síla. Po dosazení z gravitačního zákona a ze vztahu pro radiální složku zrychlení dostaneme po zkrácení hmotností diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dj}{dt} \right)^2 = -k \frac{M}{r^2} \, . \tag{5}$$

Pro kvadrát plošné rychlosti zřejmě platí

$$w^2 = \frac{r^4}{4} \left(\frac{dj}{dt} \right)^2 \, .$$

Druhý sčítanec levé strany (5) lze přepsat jako $\frac{4w^2}{r^3}$ a pohybovou rovnici pak na tvar

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4w^2}{r^3} = - \frac{k\,M}{r^2} \, . \tag{6}$$

Zaveďme novou funkci $u = \frac{1}{r}$, kterou budeme chápat jako funkci nezávisle proměnné j (druhá polární souřadnice), jež je sama funkcí času. Bude tedy zavedeno

$$r(t)=\frac{1}{u(j\,(t))}\,. \tag{7}$$

Derivujme tuto rovnici podle času

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dj}\frac{dj}{dt}=-r^2\frac{dj}{dt}\frac{du}{dj}=-2w\frac{du}{dj}\,. \tag{8}$$

Derivujme tuto rovnici podruhé s využitím vztahu $w=konst.$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-2w\frac{d^2u}{dj^{\,2}}\frac{dj}{dt}\,.$$

Ale $\frac{dj}{dt}=\frac{2w}{r^2}$. Proto

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-4w^2\,u^2\,\frac{d^2u}{dj^{\,2}}\,. \tag{9}$$

Dosazením do (6) získáme

$$-4w^2\,u^2\frac{d^2u}{dj^{\,2}}-4w^2\,u^3=-k\,M\,u^2\,.$$

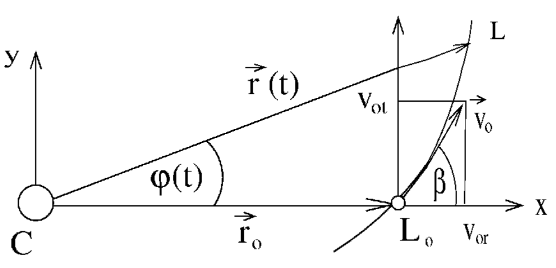
Protože podle (7) $u\neq 0$, získáme krácením u^2 rovnici

$$\frac{d^2u}{dj^{\,2}}+u=\frac{k\,M}{4w^2}=konst. \tag{10}$$

To je lineární diferenciální rovnice II. řádu s konstantními koeficienty (dokonce bez členu s první derivací) s konstantní stranou pro neznámou funkci $u(j\,)$. Obecné řešení homogenní rovnice je zřejmě $u_H(j\,)=C_1\cos j\,+C_2\sin j$ (kořeny charakteristické rovnice $l_{1,2}=\pm\,i$) a partikulární řešení $u_P(p)=\frac{k\,M}{4w^2}$. Obecné řešení (10) je proto

$$u(j\,)=\frac{k\,M}{4w^2}+C_1\cos j\,+C_2\sin j\,, \tag{11}$$

kde integrační konstanty C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek (bodu a rychlosti navedení na dráhu v centrálním poli). Je třeba určit $u\big|_{j=0}$ a $\frac{du}{dj}\big|_{j=0}$, jestliže klasické počáteční podmínky pro rovnici (6) funkci $r(t)$ jsou $\vec{r}\big|_{t=0}=\vec{r}_0$ (vzdálenost bodu navedení od centra) a $\frac{d\vec{r}}{dt}\big|_{t=0}=\vec{v}_0$ (vektor rychlosti navedení).



Protože hlavní směr polárních souřadnic byl volen na naváděcí bod L_0, jsou ekvivalentní tyto polohové počáteční podmínky:

$$\vec{r}\big|_{t=0} = \vec{r}_0 \Leftrightarrow u\big|_{j=0} = \frac{1}{r_0}\,. \tag{12}$$

Rychlostní počáteční podmínku určíme z výrazů pro radiální a transverzální složku rychlosti, které platí i pro počáteční čas (a úhel j). Přitom podle obrázku zřejmě $v_r\big|_{t=0} = v_0 \cos b$ a $v_t\big|_{t=0} = v_0 \sin b$. Proto platí

$$v_r\big|_{t=0} = \frac{dr}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 \cos b\ , \tag{13}$$

$$v_t\big|_{t=0} = r\big|_{t=0}\ \frac{dj}{dt}\Big|_{t=0} = v_0 \sin b\ , \tag{14}$$

kde v_0 je velikost navádění rychlosti a b naváděcí úhel (viz obrázek). Podle (8) ovšem (13) přepíšeme jako

$$v_0 \cos b = \frac{dr}{dt}\Big|_{t=0} = -2w\frac{du}{dj}\Big|_{j=0} \tag{15}$$

a podle vztahu pro plošnou rychlost (14) zase přepíšeme na

$$v_0 \sin b = r_0\,\frac{dj}{dt}\Big|_{t=0} = r_0\,\frac{2w}{r_0^2}\,. \tag{16}$$

Prodělením rovnic (15) a (16) (v tomto pořadí) získáme konečně

$$\mathrm{cotg}\, b = -\frac{du}{dj}\Big|_{j=0}\ r_0\,,$$

odkud

$$\frac{du}{dj}\Big|_{j=0} = -\frac{\mathrm{cotg}\, b}{r_0}\ . \tag{17}$$

Počáteční podmínky (12) a (17) aplikujeme na řešení (11) a jeho derivaci

$$\frac{du}{dj} = -C_1 \sin j + C_2 \cos j\ . \tag{18}$$

Dosazením $t = 0$ do (11) získáme s ohledem na (12)

$$u(0) = \frac{k\,M}{4w^2} + C_1 = \frac{1}{r_0} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{k\,M}{4w^2}\ . \tag{19}$$

Dosazením $t = 0$ do (18) získáme s ohledem na (17)

$$\frac{du}{dj}(0) = C_2 = -\frac{\mathrm{cotg}\, b}{r_0}\,. \tag{20}$$

Dosazením konstant (19), (20) do (11) máme konkrétní řešení pohybové rovnice ve tvaru

$$u(j) = \frac{1}{r(j)} = \frac{k\,M}{4w^2} + \left(\frac{1}{r_0} - \frac{k\,M}{4w^2}\right)\cos j - \frac{\mathrm{cotg}\, b}{r_0}\sin j\ . \tag{21}$$

Proveďme nyní transformaci lineární kombinace sinů a kosinů na kosinus fázově posunutý. Zavedeme-li konstanty A a g jako

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{k\,M}{4w^2}\right)^2+\frac{\mathrm{cotg}^2\,b}{r_0^2}}\;;$$

$$\cos g=\frac{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{k\,M}{4w^2}\right)}{A};\quad \sin g=\frac{\frac{\mathrm{cotg}\,b}{r_0}}{A} \tag{22}$$

dostaneme podle (21)

$$r(j)=\frac{1}{\frac{k\,M}{4w^2}+A\cos(j+g)}=\frac{\frac{4w^2}{k\,M}}{1+A\frac{4w^2}{k\,M}\cos(j+g)}\,.$$

To je polární ohnisková rovnice kuželosečky o parametru

$$p=\frac{4w^2}{k\,M}\,, \tag{23}$$

numerické výstřednosti

$$e=\frac{4w^2}{k\,M}\sqrt{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{k\,M}{4w^2}\right)^2+\frac{\mathrm{cotg}^2\,b}{r_0^2}}=p\,A \tag{24}$$

a pericentrem (bodem nejbližším k centru) v úhlové odchylce $-g$ od směru bodu navedení. Podle (16) navíc je

$$4w^2=r_0^2\,v_0^2\,\sin^2 b\;. \tag{25}$$

Dosazením do (23) a (24) dostaneme po úpravě

$$p=\frac{r_0^2\,v_0^2\,\sin^2 b}{k\,M}\,,$$

$$e=\sqrt{\frac{r_0^2\,v_0^2\,\sin^2 b}{k\,M}\left(\frac{r_0^2\,v_0^2}{k\,M}-2\right)+1}\,. \tag{26}$$

Z počátečních podmínek r_0, v_0, b a hmotnosti M centra určíme typ kuželosečky ($e=0$ kružnice, $e\in(0,1)$ elipsa, $e=1$ parabola, $e>1$ větev hyperboly) i její rozměry. Pro kružnici je $p=R$ (poloměr kružnice), pro parabolu je její parametr určující veličinou. Pro elipsu a hyperbolu platí $p=\frac{b^2}{a}$, $e=\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2\,m\,b^2}}{a}$, kde *a, b* jsou poloosy, *e* délková výstřednost. Horní znaménko platí pro elipsu, spodní pro hyperbolu. Odtud

$$a=\frac{p}{\pm\left(1-e^2\right)}\,,\qquad b=\frac{p}{\sqrt{\pm\left(1-e^2\right)}}\,, \tag{27}$$

kde horní znaménko opět platí pro elipsu a spodní pro hyperbolu.

Uvažujme nyní směr navedení kolmo k průvodiči naváděcího bodu, tedy úhel navedení $b = \frac{p}{2}$. Z (24) a (25) dostaneme pro tento případ $\left(\operatorname{cotg} \frac{p}{2} = 0 \right)$

$$e = \frac{4w^2}{k\,M\,r_0} - 1 = \frac{r_0\,v_0^2}{k\,M} - 1\,, \qquad g = 0 \quad \text{nebo} \quad p\,. \tag{27a}$$

Pro danou naváděcí vzdálenost r_0 je e (pro $v_0 > 0$) rostoucí funkcí naváděcí rychlosti. Určíme, pro jakou rychlost v_0 je $e = 0$ (kružnice) a pro jakou je $e = 1$ (parabola). Zřejmě

$$e = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k\,M}{r_0}} = v_I\,,$$

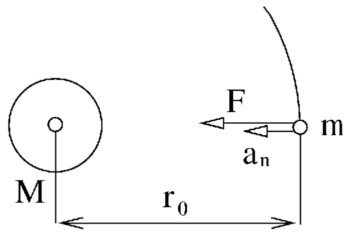
$$e = 1 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k\,M}{r_0}} = \sqrt{2}\;v_I = v_{II}\,. \tag{28}$$

Naváděcí rychlosti v_I v (28) říkáme první kosmická rychlost (příslušející k centru M a naváděcí vzdálenosti r_0). Rychlosti $v_{II} = \sqrt{2}\,v_I$ říkáme druhá kosmická rychlost.

Při naváděcím úhlu $b = \frac{p}{2}$ (tzv. vodorovný vrh) je pro $v_0 = v_I$ trajektorie kruhová, pro $v_0 \in (v_I\,, v_{II})$ trajektorie eliptická s bodem navedení v pericentu, pro $v_0 = v_{II}$ je trajektorie parabolická a pro $v_0 > v_{II}$ je drahou větev hyperboly (bližní k centru). Pro $e \in (-1, 0)$, čemuž odpovídá $v_0 \in (0,\ v_I)$, je drahou rovněž elipsa s bodem navedení v apocentru (nejvzdálenější bod od centra)

Poznámky:

1) Rychlost v_I lze také chápat jako rychlost rovnoměrně se pohybujícího bodu po kruhové dráze kolem středu centra hmotnosti M. Na bod působí pouze Newtonova gravitační síla. Pohybová rovnice rozepsaná do normálového směru je

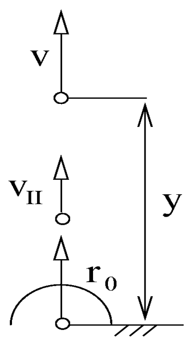


$$m\,a_n = k\,\frac{m\,M}{r_0^2}\,.$$

Pro normálové zrychlení při kruhovém pohybu zřejmě platí $a_n = \frac{v^2}{r_0}$. Proto

$$v = \sqrt{\frac{k\,M}{r_0}} = v_I\,.$$

Pohybová rovnice do směru tečny má triviální tvar $0 = 0$.



2) Rychlost v_{II} lze rovněž chápat jako rychlost svislého vrhu ve vzdálenosti r_0 od středu centra nutnou k dosažení (bez přísunu energie při zanedbání působení ostatních kosmických těles) teoreticky nekonečné vzdálenosti. Použijeme větu o změně kinetické energie mezi startem (poloha r_0 rychlost v_{II}) a nekonečnou

vzdáleností (rychlost nulová). V průběhu pohybu působí na bod pouze Newtonova gravitační síla mířící ve směru záporného přírůstku dráhy (práci spotřebovává). Věta o změně E_k tedy dává

$$0-\frac{1}{2}m\,v_{II}^2=-\int_{r_0}^{\infty}k\,\frac{mM}{y^2}\,dy\,.$$

odkud

$$v_{II}^2=2k\,M\int_{r_0}^{\infty}\frac{dy}{y^2}=-\frac{2k\,M}{y}\Big|_{r_0}^{\infty}=\frac{2k\,M}{r_0}\,.$$

3) Pro eliptickou (nebo kruhovou) dráhu má smysl hovořit o době oběhu T centra. Protože plošná rychlost je konstantní, platí $wt=A$, kde A je plocha opsaná průvodičem bodu za čas t. Pro $t=T$ je $A=p\,a\,b$ (plocha celé elipsy). Tedy

$$wT=p\,a\,b\,. \tag{29}$$

Podle (23) platí pro parametr elipsy

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{4w^2}{k\,M}\,. \tag{30}$$

Z (30) $\Rightarrow$ $b=2w\sqrt{\frac{a}{k\,M}}$. Dosazením do (29) po zkrácení w

$$T=2p\,a\sqrt{\frac{a}{k\,M}}\,.$$

Umocněním odtud

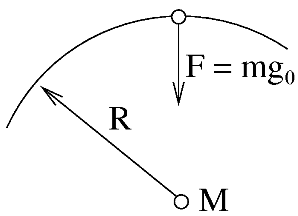
$$T^2=4p^2\,\frac{a^3}{k\,M}\Leftrightarrow\frac{T^2}{a^3}=\frac{4p^2}{k\,M}=konst.$$

Tento výsledek je znám jako III. Keplerův zákon. Pro dvě tělesa obíhající kolem téhož centra tak platí

$$\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3}=konst.\Leftrightarrow\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2.$$

Kvadráty dob oběhu dvou těles kolem téhož centra se k sobě mají jako třetí mocniny velkých poloos jejich eliptických drah.

4) Při kvantitativním vyčíslení např. trajektorií družic Země je třeba znáti hmotnost Země. Určíme ji pomocí znalosti poloměru Země R a povrchového gravitačního zrychlení g_0. Tíha mg_0 bodu na zemském povrchu je Newtonova přitažlivá síla na vzdálenosti $r=R$. Proto platí $m\,g_0=k\,\frac{M\,m}{R^2}$ odkud



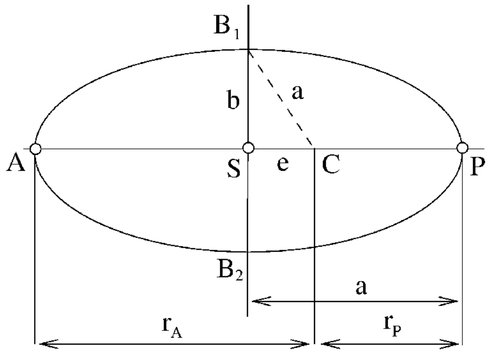
$$M = \frac{g_0 R^2}{k}.$$

Pro Zemi vychází $g_0 = 9{,}81 m/s^2$; $R = 6{,}378 \cdot 10^6 m$; $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, takže $M_{Země} = 5{,}983 \cdot 10^{24} kg$.

PŘÍKLAD

Uvažujme družici Země navedenou na dráhu ve vzdálenosti $r = 12000\ km$ od středu Země (tedy $5622\ km$ nad hladinou moří) startovací rychlostí $v_0 = 6\ km/s$ pod naváděcím úhlem $b = 1 rad\ (= 57{,}3°)$. Určete tvar dráhy a v případě její eliptičnosti její poloosy, dobu oběhu a rychlosti družice v perigeu a apogeu.

Řešení: Z (25) pro plošnou rychlost máme $w = \frac{r v_0}{2} \sin b$, což po dosazení dává $w = 30293 km^2/s$. Dosazením do (22) získáme $g = 2{,}01376\ rad = 115°\ 22'49''$. Úhel $-g = 2p - g = 4{,}26943 rad = 244°\ 37'11''$ je pak úhel, jenž svírá směr na perigeum dráhy se směrem na bod navedení (z pólu polárních souřadnic, jenž jest ve středu Země). Dosazením do (24) $(k = 6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2},\ M = 5{,}983 \cdot 10^{24} kg)$ získáme pro numerickou výstřednost



dráhy $e = 0{,}54475$. Drahou je tedy elipsa. Její parametr má podle (23) hodnotu $p = 9198 km$. Podle (27) pak (horní znaménka) pro poloosy elipsy dostáváme $a = 13079 km,\ b = 10968 km$. Délková výstřednost dráhy je podle své definice $e = a\ e = 7125 km$. Podle obrázku se zakreslenými významnými body elipsy (S - střed, C – ohnisko = střed Země, P – perigum, A – apogeum) a důležitými vzdálenostmi (r_P vzdálenost perigea, r_A vzdálenost apogea od středu Země) dostáváme

$$r_P = a - e = 5954\ km;\ r_A = a + e = 20204\ km.$$

Protože poloměr Země je $r_z = 6378\ km$, znamená to, že perigeum leží pod povrchem Země. Drahou tedy bude pouze eliptický oblouk mezi bodem navedení a prvním kontaktem se zemským povrchem. Pro dobu oběhu (fiktivní) by podle (29) platilo $T = \frac{p\ ab}{w} = 14878\ sec =$ $4\ hod\ 7\ min\ 58\ sec$. Podle (25) aplikované na perigeum a apogeum (to jest hlavní vrcholy dráhy, kdy $b = \frac{p}{2}$) dostáváme $w = \frac{r_P\, v_P}{2} = \frac{r_A\, v_A}{2}$, kde v_P je rychlost v perigeu a v_A v apogeu. Odtud $v_x = \frac{2w}{r_x}$ $(x = P,\ A)$, takže číselně vychází $v_P = 10{,}17\ km/s$, $v_A = 3{,}00\ km/s$.

Poznámka: Podle (28) je ve startovací poloze *r* první kosmická rychlost $v_1 = 5{,}77\ km/s$ a druhá kosmická rychlost $v_2 = 8{,}16\ km/s$.

PŘÍKLAD

Uvažujme opět tělesa navedená v gravitačním poli Země vodorovným vrhem $\left(b = \frac{p}{2}\right)$ ve vzdálenosti $r = 12000\ km$ od středu Země na kuželosečkové dráhy postupně naváděcími rychlostmi $v_0 = 3;\ 5;\ 5{,}77;\ 7;\ 8{,}16;\ 10\ km/s$. Popište pohyb těles ve všech šesti uvedených případech.

Řešení: Podle (27a) je pro danou startovací polohu numerická výstřednost dráhy rovna

$$e = 3{,}00702 \cdot 10^{-8}\ v_0^2 - 1 .$$

Dosazením zadaných startovacích rychlostí získáme výsledky obsažené v následující tabulce:

Číslo případu	1	2	3	4	5	6
$v_0\,[km/s]$	3	5	5,77	7	8,16	10
e	-0,729	-0,248	0,001	0,473	1,002	2,007

Z výsledků plyne, že první dva případy vykazují $e < 0$. Jedná se tedy o eliptickou dráhu s bodem navedení v apogeu. Třetí případ byl volen tak, aby naváděcí rychlost byla na 3 platné cifry rychlostí první kosmickou. Dráha by měla být kruhová. Ve skutečnosti e vychází malé kladné (nepatrně eliptická dráha s bodem navedení v perigeu). Čtvrtý případ dává $e \in (0; 1)$, tedy klasickou elipsu s bodem navedení v perigeu. Pátý případ byl volen tak, aby naváděcí rychlost byla na 3 platné cifry rychlostí druhou kosmickou. Dráha by měla býti parabolická. Ve skutečnosti vychází e o trochu větší, takže drahou je větev hyperboly od paraboly se málo lišící. Šestý případ dává $e > 1$, takže drahou je klasická větev hyperboly. Podle (23) a (25) určíme plošné rychlosti družice a parametry *p* její dráhy pro jednotlivé případy. Podle (27) dále určíme délky poloos drah (pro hyperboly je poloosa *b* fiktivní). Délkovou výstřednost určíme z výrazu $e = a\ e$. Z výrazů $r_p = a - e$ a $r_A = a + e$ určíme pro eliptické dráhy vzdálenost perigea a apogea od středu Země. Protože hyperbola je neuzavřená křivka, není pro ni r_A definována a $r_p = r$ (vzdálenost navedení).Pro první případ je $r_p < r_z$ (poloměr Země), takže po navedení touto rychlostí v dané poloze dojde ke kontaktu s povrchem Země a drahou je vlastně jen eliptický oblouk. Pro eliptické dráhy určíme navíc plochu elipsy $P = p\ ab$, dobu oběhu Země podle (29) a ze vztahu $2w = r_P\ v_P = r_A\ v_A$ navíc určíme rychlost v obou hlavních vrcholech eliptické dráhy. Pro hyperbolické dráhy zřejmě platí $v_P = v_0$ a v_A není definována. Doba periody *T* i rychlost v perigeu v_P pro případ 1 jsou hypotetické hodnoty, protože těleso této polohy nedosáhne. Číselné výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

Číslo případu	1	2	3	4	5	6
$v\ [km^2/s]$	18000	30000	34620	42000	48960	60000
$p\,[Mm]$	3,248	9,021	12,013	17,681	24,027	36,084
$a\,[Mm]$	6,939	9,613	12,013	22,789	5350,607	11,916
$b\,[Mm]$	4,747	9,313	12,013	20,073	358,551	20,736
$e\,[Mm]$	5,061	2,386	0,013	10,779	5362,607	23,916
$r_P\,[Mm]$	1,878	7,227	12,000	12,000	12,000	12,000
$r_A\,[Mm]$	12,000	12,000	12,027	33,579	-	-
$P\,[Mm^2]$	103,5	281,3	453,4	1437,2	-	-
$T\,[s]$	5749	9375	13097	34218	-	-
$T\,[h,\ m, s]$	1h 35m 49 s	2h 36 m 15 s	3h 38m 17s	9h 30m 18s	-	-
$v_P\,[km/s]$	19,17	8,30	5,77	7,00	8,16	10,00
$v_A\,[km/s]$	3,00	5,00	5,76	2,50	-	-