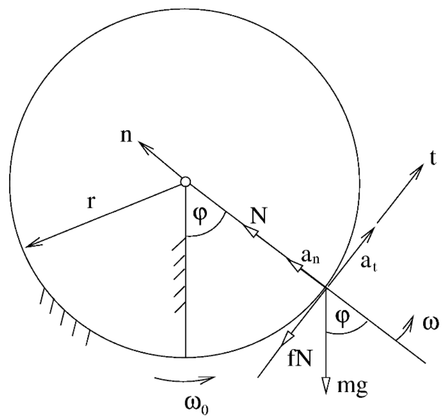
OBOUSTRANNÁ VAZBA BODU K DRSNÉ KRUHOVÉ OBRUČI POLOMĚRU R UMÍSTĚNÉ VE SVISLÉ ROVINĚ

SPECIFIKACE PROBLÉMU



Vyřešíme úlohu pohybu bodu vystartovavšího ze spodní polohy $j = 0$ startovací úhlovou rychlostí w_0. Koeficient tření (za pohybu) je *f*. Jedná se o kruhový pohyb bodu, na který kromě tíhy a normálové reakce působí ještě třecí síla. Tato působí proti smyslu pohybu. Za předpokladu narůstání úhlu j působí tak, jak je uvedeno na obrázku.

ŘEŠENÍ

Pohybové rovnice mají tvar

$$t: \quad m\, r\, a = -mg \sin j - f\, N\,, \tag{1}$$

$$n: \quad m\, r\, w^2 = N - mg \cos j\,. \tag{2}$$

Obě rovnice jsou provázány přes normálovou reakci. Jejím vyjádřením z (2) a dosazením do (1) získáme vlastní pohybovou rovnici jako $(m \neq 0)$

$$r\left(a + f\, w^2\right) + g\left(\sin j + f\, \cos j\right) = 0\,. \tag{3}$$

Tuto rovnici lze analyticky integrovat v oblasti polohy. Dosazením $a = \dfrac{1}{2}\dfrac{dw^2}{dj}$ dostaneme

$$\frac{d\,w^2}{dj} + 2 f\, w^2 = -2\frac{g}{r}\left(\sin j + f\, \cos j\right). \tag{4}$$

Je patrno, že se jedná o lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty a harmonickou pravou stranou pro neznámou funkci $w^2(j)$. Vzhledem k zadaným počátečním podmínkám fyzikální úlohy je počáteční podmínka pro řešení této diferenciální rovnice tvaru

$$w^2(0) = w_0^2\,. \tag{5}$$

Obecné řešení (4) je součtem obecného řešení $w_H^2(j)$ homogenní rovnice (bez pravé strany) a jediného odhadnutého (tzv. partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou $w_P^2(j)$. Řešení homogenní rovnice je tvaru $w_H^2(j) = C\, e^{l\, j}$, kde C je integrační konstanta a l kořen charakteristické rovnice. Tato má v našem případě tvar $l + 2 f = 0$, takže její kořen $l = -2 f$. Obecné řešení homogenní rovnice (4) proto je

$$w_H^2(j) = C\, e^{-2fj} \tag{6}$$

pro libovolné reálné C. Partikulární řešení vzhledem k harmoničnosti pravé strany odhadujeme v kvalitativně stejném tvaru jako je pravá strana. Budeme jej hledat ve tvaru

$$w_P^2(j) = A\cos j + B\sin j \tag{7}$$

pro zatím neurčené koeficienty A a B. Určíme je z podmínky, že partikulární řešení (7) musí být řešením rovnice (4). Dosazením (7) do (4) získáme identitu

$$\cos j\,(B + 2fA) + \sin j\,(2fB - A) = -2f\frac{g}{r}\cos j - 2\frac{g}{r}\sin j\ ,$$

která musí být splněna pro libovolné j. Musí proto být rovny koeficienty u $\cos j$ i u $\sin j$ na obou stranách. Dostáváme pro A a B tedy soustavu lineárních algebraických rovnic tvaru

$$2fA + B = -2f\frac{g}{r},$$

$$-A + 2fB = -2\frac{g}{r}.$$

Jejím řešením získáme

$$A = 2\frac{g}{r}\frac{1-2f^2}{1+4f^2}, \qquad B = -6\frac{g}{r}\frac{f}{1+4f^2}.$$

Dosazením do (7) pro partikulární řešení dostáváme

$$w_P^2(j) = \frac{2}{1+4f^2}\frac{g}{r}\left[\left(1-2f^2\right)\cos j - 3f\sin j\right]. \tag{8}$$

Podle (6) a (8) obecné řešení (4) má tvar

$$w^2(j) = w_H^2(j) + w_P^2(j) = C\,e^{-2fj} + \frac{2}{1+4f^2}\frac{g}{r}\left[\left(1-2f^2\right)\cos j - 3f\sin j\right]. \tag{9}$$

Integrační konstantu C získáme dosazením $j = 0$ do (9) a zohledněním počáteční podmínky (5). Dostaneme

$$w^2(j) = w_0^2 = C + \frac{2}{1+4f^2}\frac{g}{r}\left(1-2f^2\right),$$

odkud

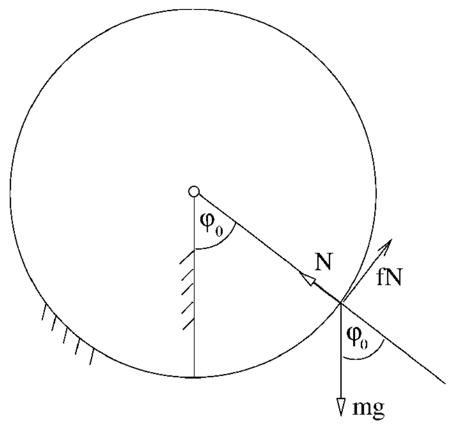
$$C = w_0^2 - \frac{2}{1+4f^2}\frac{g}{r}\left(1-2f^2\right). \tag{10}$$

Konkrétní řešení pohybové rovnice (4), splňující počáteční podmínku (5), získáme dosazením konstanty (10) do obecného řešení (9). Získáme

$$w^2(j) = \left[w_0^2 - \frac{2}{1+4f^2}\frac{g}{r}\left(1-2f^2\right)\right] e^{-2fj} + \frac{2}{1+4f^2}\frac{g}{r}\left[\left(1-2f^2\right)\cos j - 3f\sin j\right]. \tag{11}$$

Závislost kvadrátu úhlové rychlosti na poloze je tedy poměrně složitá ubývající exponenciála s nasuperponovanou harmonickou funkcí startující pro $j = 0$ z kladné hodnoty w_0^2. Její průběh je možno pro zadané parametry w_0, r, f určit vyvoláním příslušného souboru na této stránce. Nejmenší kladný nulový bod j_0 této funkce je bodem zastavení. Je zřejmé, že pro dostatečně velké w_0 může tento bod j_0 být větší než $2p$. Znamená to, že hmotný bod opíše celou jednu otáčku a zastaví se až v průběhu další. Vlivem tření však dojde k zastavení vždy, ať je w_0 jakkoliv veliká.

Další pohyb záleží na poloze, v níž dojde k zastavení. Nechť je to poloha j_0. K pohybu v opačném smyslu dojde zřejmě právě když tečná složka tíhy převýší třecí sílu (viz obrázek).



Mezní úhel $\tilde{j}_0$, kdy opět dojde k pohybu je ten, kdy

$$mg \sin \tilde{j}_0 = f\,N\,. \qquad (12)$$

Protože (statická) podmínka rovnováhy do směru normály dává $N = mg \cos \tilde{j}_0$, dostáváme dosazením do (12)

$$mg \sin \tilde{j}_0 = f\,mg \cos \tilde{j}\,.$$

neboli $(mg \neq 0)$

$$\mathrm{tg}\,\tilde{j}_0 = f\,. \qquad (13)$$

Snadno lze ověřit, že podobná situace nastane i v blízkém okolí $j = p$ (v horní labilní poloze bodu) a po překonání několika otáček i v polohách $j = kp$, k přirozené. Jestliže tedy nejmenší kladný nulový bod j_0 funkce (11) leží ve sjednocení intervalů $(kp - \tilde{j}_0,\, kp + \tilde{j}_0)$ pro k přirozené, nedojde už k dalšímu pohybu. V opačném případě dojde k pohybu v opačném smyslu (opačný smysl třecí síly) při počátečních podmínkách $j(0) = j_0$, $w(0) = 0$. Pohybové rovnice pak mají tvar

$$m\,r\,a = -mg \sin j + f\,N \qquad \text{(opačná orientace třecí síly)}$$

$$m\,r\,w^2 = N - mg\,\cos j \qquad \text{(nezměněno)}$$

Vyloučením reakce N a dosazením za $a = \dfrac{1}{2}\dfrac{dw^2}{dj}$ odtud dostaneme vlastní pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{dw^2}{dj} - 2f\,w^2 = 2\frac{g}{r}(-\sin j + f \cos j)\,. \qquad (14)$$

Tuto rovnici řešíme při počáteční podmínce $w^2(j_0) = 0$, kde j_0 je poloha zastavení výše numericky získaná. Metodika řešení této rovnice je analogická jako u rovnice (4). Kořen charakteristické rovnice zde je kladný. Výsledkem je řešení $w^2(j)$ tvaru na rostoucí exponenciálu nasuperponovaná harmonická funkce. Toto řešení (zpočátku) roste. Nutno si však uvědomit, že se jedná o kvadrát úhlové rychlosti. Po odmocnění $w(j) = \pm\sqrt{w^2(j)}$. Vlastní úhlová rychlost (její první mocnina) má z fyzikální podstaty opačný smysl (záporné signum).

Poznámky:

1) Z rovnice (2) vyplývá pro normálovou reakci výraz

$$N = m\left(rw^{2} + g\cos j\right).$$

Dosazením z (11) získáme průběh normálové reakce v závislosti na poloze do prvního zastavení ve tvaru

$$N(j) = m\,r\,w_{0}^{2} - \frac{2mg}{1+4f^{2}}\left[3f\sin j + 2f^{2}\cos j + \left(1+2f^{2}\right)e^{-2fj}\right].$$

Protože se jedná o oboustrannou vazbu (objímka navlečená na obruč) přenáší tato vazba reakci libovolného signa.

2) Řešení rovnice (3) v časové oblasti není analyticky v uzavřeném tvaru možné. Zavedením funkce $w = \frac{dj}{dt}$ však lze (3) spolu s touto definicí zapsat jako soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\frac{dw}{dt} = -f\,w^{2} - g\,(\sin j + f\cos j),$$

$$\frac{dj}{dt} = w\,.$$

Zavedením vektorových funkcí $\mathrm{j}^{T} = [w, j]$ a $\mathbf{f}^{T} = \left[-f\,w^{2} - g\,(\sin j + f\cos j);\, w\right]$ přepíšeme tuto soustavu na tvar

$$\frac{d\mathrm{j}}{dt} = f\,(\mathrm{j}),$$

který při počáteční podmínce $\mathrm{j}^{T}(0) = [w_{0},\, 0]$ lze numericky řešit v MATLABu pomocí ODE23 nebo ODE45. Výsledkem tohoto řešení je animace pohybu bodu v čase, spustitelná z této webové stránky.