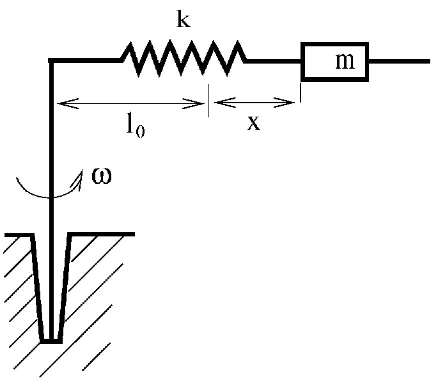
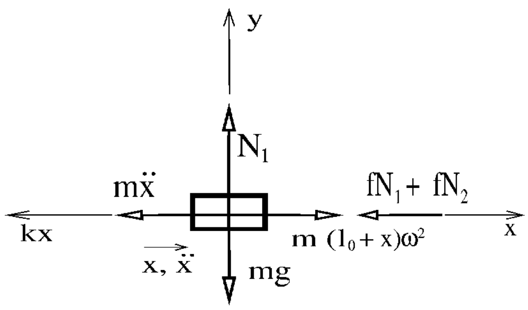
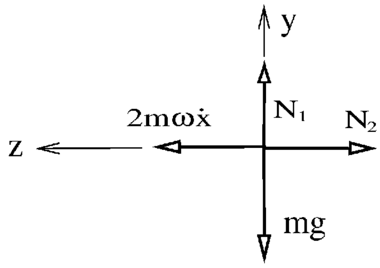
OBJÍMKA VÁZANÁ PRUŽINOU NA NEHLADKÉM OTOČNÉM RAMENI

SPECIFIKACE PROBLÉMU

Rameno čtvercového průřezu rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω. Na něm je nasazena objímka hmotnosti m s koeficientem tření f mezi ní a stěnami ramene. Objímka je vázaná k pevné ose rotace lineární pružinou volné délky l_0 a tuhosti k. V průběhu rotace ramene objímku podržíme v poloze dané volnou délkou pružiny a pustíme z relativního klidu. Popíšeme relativní pohyb objímky po rotujícím rameni.







ŘEŠENÍ

Relativní výchylku x kótujeme od volné délky pružiny (viz obr.). Silové účinky budeme vyjadřovat v souřadnicové soustavě x, y, z rotující s objímkou. Pohyb objímky rozložíme na unášivý rotační konstantní úhlovou rychlost ω. Jemu odpovídá jediný setrvačný účinek, a sice odstředivá síla ve směru osy x o velikosti $m(l_0 + x)\omega^2$. Druhotnému posuvu po rameni se zrychlením $\ddot{x}$ odpovídá setrvačná síla $m\ddot{x}$ v záporném směru osy x. Protože rozklad pohybu je obecný, je dalším setrvačným účinkem Coriolisova síla $\vec{F}_c = 2m\left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}\right)$. Protože $\vec{\omega}$ a $\dot{\vec{x}}$ jsou kolmé vektory, má velikost $F_c = 2m\omega\dot{x}$ a směr kladné osy z. Statickými akcemi jsou tíha ve směru záporné osy y, vratná síla pružiny ve směru proti relativnímu pohybu (záporné osy x). Stejného směru jsou i třecí síly $f\,(N_1 + N_2)$ od obou stýkajících se ploch. Statické reakce N_1 a N_2 mají směr os y (vyrovnává tíhu) a z (vyrovnává Coriliosovu sílu). Jedná se o prostorovou soustavu sil (procházející těžištěm objímky). Pohybové rovnice mají tvar

$$x:\ m(l_0 + x)\omega^2 - kx - m\ddot{x} - f\,(N_1 + N_2) = 0\,, \tag{1}$$

$$y:\ N_1 - mg = 0\,, \tag{2}$$

$$z:\ N_2 - 2m\omega\dot{x} = 0\,. \tag{3}$$

Vlastní pohybovou rovnici získáme vyloučením reakcí. Dosazením z (2) a (3) do (1) máme

$$m\ddot{x} + k\,x + fm(g + 2w\,\dot{x}) - m(l_0 + x)w^2 = 0\,.$$

Zavedením vlastní frekvence W přidružené netlumené kmitavé soustavy hmotnosti m a tuhosti k, tedy

$$W = \sqrt{\frac{k}{m}}\ , \tag{1}$$

získáme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{x} + 2\,f\,w\,\dot{x} + \left(W^2 - w^2\right)x = l_0\,w^2 - f\,g\,. \tag{2}$$

Pro neznámou funkci $x(t)$ se jedná o diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty a konstantní pravou stranou. Rovnice (2) je kvalitativně stejná jako rovnice tlumeného kmitavého pohybu buzeného skokem (konstantou). Protože model byl postaven na předpokladu pohybu objímky vpravo po rameni nemůže být konstanta na pravé straně (2) záporná. Jestliže by vycházela záporná, znamená to, že třecí síla od tíhové reakce převyšuje odstředivou sílu. V tom případě objímka zůstane v relativním klidu („neodlepí“ se od ramene). Podle (2) se jedná o případ, kdy

$$w < \sqrt{\frac{f\,g}{l_0}}\,. \tag{3}$$

Není-li splněna relace (3) řešíme (2) běžnou metodou při triviálních počátečních podmínkách

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0\,. \tag{4}$$

Pro obecné řešení platí

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)\,. \tag{5}$$

Homogenní řešení má tvar podle kořenů charakteristické rovnice tvaru

$$l^2 + 2\,f\,w\,l + \left(W^2 - w^2\right) = 0\,.$$

Diskriminant je

$$D = 4\left(f^2 w^2 + w^2 - W^2\right).$$

Mezní případ nulového diskriminantu dává

$$w^2\left(f^2 + 1\right) = W^2 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{W}{\sqrt{f^2 + 1}}\,. \tag{6}$$

1) Pro $w < \dfrac{\Omega}{\sqrt{f^2 + 1}}$ je diskriminant záporný a kořeny charakteristické rovnice jsou

$$l_{1,2} = -f\,w \pm i\sqrt{W^2 - w^2\left(f^2 + 1\right)}\,.$$

Obecné řešení homogenní rovnice k rovnici (2) proto má tvar

$$x_H(t) = e^{-f\,w\,t}\left(C_1 \cos W_D\,t + C_2 \sin W_D\,t\right). \tag{7}$$

Zde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které na závěr určíme z počátečních podmínek a W_D je úhlová frekvence, pro niž platí

$$\Omega_D = \sqrt{\Omega^2 - \omega^2\left(f^2 + 1\right)}\,. \tag{8}$$

Protože nula není kořenem charakteristické rovnice, odhadujeme partikulární řešení také jako konstantu. Tato konstanta musí splňovat rovnici (2). Musí tedy býti

$$x_P(t) \equiv x_{st} = \frac{l_0\,\omega^2 - f\,g}{\Omega^2 - \omega^2} = konst. \tag{9}$$

Dosazením (7) a (9) do (5) získáme obecné řešení jako

$$x(t) = x_{st} + e^{-f\,\omega\,t}\left(C_1 \cos\Omega_D\,t + C_2 \sin\Omega_D\,t\right). \tag{10}$$

Časovou derivací pak

$$\dot{x}(t) = e^{-f\,\omega\,t}\left[-f\,\omega\left(C_1 \cos\Omega_D\,t + C_2 \sin\Omega_D\,t\right) + \Omega_D\left(-C_1 \sin\Omega_D\,t + C_2 \cos\Omega_D\,t\right)\right].$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek (4) dostaneme

$$x(0) = 0 = x_{st} + C_1 \Rightarrow C_1 = -x_{st}\,,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -f\,\omega\,C_1 + \Omega_D\,C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{f\,\omega}{\Omega_D}C_1 = -\frac{f\,\omega}{\Omega_D}x_{st}\,.$$

Dosazením vypočítaných integračních konstant do (10) získáme konkrétní řešení (2) vyhovující triviálním počátečním podmínkám jako

$$x(t) = x_{st}\left[1 - e^{-f\,\omega\,t}\left(\cos\Omega_D\,t + \frac{f\,\omega}{\Omega_D}\sin\Omega_D\,t\right)\right], \tag{11}$$

kde Ω_D je dáno v (8) a x_{st} v (9). Relativním pohybem budou tlumené kmity kolem nové statické rovnovážné polohy x_{st} s frekvencí Ω_D (dobou periody $T = \frac{2\pi}{\Omega_D}$). Tlumení bude tím silnější, čím větší bude třecí koeficient a čím rychlejší bude rotace ramene.

Důležitá poznámka: Protože matematický model (2) byl postaven za předpokladu pohybu vpravo, platí vztah (11) pouze do prvního extrému této funkce s kladnou hodnotou nabývání. Pak by objímka byla v relativním klidu v jakési extremální hodnotě $x = x_1$ a nastal by zpětný pohyb. Museli bychom řešit model při obrácených třecích silách. Pohybová rovnice by pak měla tvar

$$\ddot{x} - 2\,f\,\omega\,\dot{x} + \left(\Omega^2 - \omega^2\right)x = l_0\,\omega^2 + f\,g\,,$$

kterou bychom řešili při počátečních podmínkách

$$x(0) = x_1\,; \quad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Toto řešení zachází už za rámec tohoto textu. Na závěr této důležité poznámky ještě určíme, do jakého času t_0 platí řešení (11). Zavedením parametrů A (amplitudy) a γ (fáze) výrazy

$$A = \sqrt{1 + \frac{f^2\,\omega^2}{\Omega_D^2}} = \frac{\sqrt{\Omega_D^2 + f^2\,\omega^2}}{\Omega_D}\,,$$

$$\cos g = \frac{\frac{f\,w}{W_D}}{A} = \frac{f\,w}{\sqrt{W_D^2 + f^2 w^2}}; \qquad \sin g = \frac{1}{A} = \frac{W_D}{\sqrt{W_D^2 + f^2 w^2}}$$

přepíšeme (11) do tvaru výhodnějšího pro nalezení prvního extrému s kladným bodem nabývání (neboli prvního kladného nulového bodu rychlosti). Tento tvar (11) je

$$x(t) = x_{st}\left[1 - A\,e^{-f\,w\,t}\sin(W_D\,t + g)\right].$$

Derivací pak

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\,x_{st}\,e^{-f\,w\,t}\left[-f\,w\sin\left(\Omega_D\,t + g\right) + \Omega_D\cos\left(\Omega_D\,t + g\right)\right].$$

Zřejmě pro nulové body rychlosti platí

$$v(t_j) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f\,w\sin\left(W_D\,t_j + g\right) = W_D\cos\left(W_D\,t_j + g\right); \quad j = 0, 1, \ldots\ .$$

Tedy platí

$$tg\left(W_D\,t_j + g\right) = \frac{W_D}{f\,w} \quad \Leftrightarrow \quad W_D\,t_j + g = arctg\,\frac{W_D}{f\,w} + j\,p\ .$$

Nejmenší kladný bod t_j, kde je toto splněno je pro $j = 1$, tedy

$$t_1 = \frac{1}{\Omega_D}\left[arctg\,\frac{\Omega_D}{f\,w} - g + p\right].$$

Řešení (11) je platné pouze na $\left\langle 0,\ t_1\right\rangle$.

2) Pro $w > \frac{W}{\sqrt{f^2 + 1}}$ je diskriminant charakteristické rovnice kladný a její kořeny jsou

$$l_{1,2} = -f\,w \pm \sqrt{w^2\left(f^2 + 1\right) - W^2}\ .$$

Obecné řešení homogenní rovnice k (2) má proto tvar

$$x_H(t) = e^{-f\,w\,t}\left(C_1\cosh W_D\,t + C_2\sinh W_D\,t\right), \tag{12}$$

kde $C_i\ (i = 1, 2)$ jsou integrační konstanty a pro W_D platí vztah

$$W_D = \sqrt{w^2\left(f^2 + 1\right) - W^2}\ . \tag{13}$$

Zde je nutné vzhledem k partikulárním řešení rozlišit dva podpřípady:

a) Nechť $W \neq w$. Pak zřejmě žádný kořen charakteristické rovnice není nulový a partikulární má opět tvar (9). Výsledné řešení získáme dosazením (12) a (9) do (5). Dostaneme

$$x(t) = x_{st} + e^{-f\,w\,t}\left(C_1\cosh W_D\,t + C_2\sinh W_D\,t\right). \tag{14}$$

Derivací poté

$$v(t) = \dot{x}(t) = e^{-f\,w\,t}\left[-f\,w\left(C_1\cosh W_D\,t + C_2\sinh W_D\,t\right) + W_D\left(C_1\sinh W_D\,t + C_2\cosh W_D\,t\right)\right].$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním počátečních podmínek dostaneme

$$x(0) = 0 = x_{st} + C_1 \Rightarrow C_1 = -x_{st} \,,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -f\, w\, C_1 + W_D\, C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{f\, w}{W_D} C_1 = -x_{st}\, \frac{f\, w}{W_D} \,.$$

Konkrétní řešení splňující triviální počáteční podmínky je potom

$$x(t) = x_{st}\left[1 - e^{-f\, w\, t}\left(\cosh W_D\, t + \frac{f\, w}{W_D} \sinh W_D\, t\right)\right], \tag{15}$$

kde W_D je dáno v (13) a x_{st} v (9). Protože (15) je na $\langle 0,\, \infty \rangle$ rostoucí, platí toto řešení pro libovolný čas.

b) Nechť $W = w$ (i tento případ spadá pod případ $w > \dfrac{W}{\sqrt{f^2 + 1}}$). Potom pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{x} + 2\, f\, W\, \dot{x} = l_0\, W^2 - f\, g \,. \tag{16}$$

Opět platí

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \,. \tag{17}$$

Charakteristická rovnice je tvaru

$$l^2 + 2\, f\, W\, l = 0 \,.$$

Má tedy kořeny

$$l_1 = 0; \quad l_2 = -2\, f\, W \,.$$

Proto je

$$x_H(t) = C_1 + C_2\, e^{-2\, f\, W\, t} \,. \tag{18}$$

Partikulární řešení (vzhledem k tomu, že nula je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice) musíme odhadovat ve tvaru

$$x_P(t) = K\, t \,.$$

Konstantu K určíme z identického splnění rovnice (16) tímto řešením. Dosazením dostáváme

$$2\, f\, W\, K = l_0\, W^2 - f\, g \,,$$

$$K = \frac{l_0\, W^2 - f\, g}{2\, fW} \,.$$

Partikulární řešení proto je

$$x_P = \frac{\left(l_0\, W^2 - f\, g\right) t}{2\, fW} \,. \tag{19}$$

Dosazením (18) a (19) do (17) získáme obecné řešení ve tvaru

$$x(t) = C_1 + \frac{\left(l_0\, W^2 - f\, g\right)}{2\, fW}\, t + C_2\, e^{-2\, f\, W\, t} \,. \tag{20}$$

Derivací

$$\dot{x}(t) = \frac{l_0\, W^2 - f\, g}{2\, fW} - 2\, f\, W\, C_2\, e^{-2\, f\, W\, t}\, .$$

Dosazením $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním triviálních počátečních podmínek dostaneme

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2 = \frac{f\, g - l_0\, W^2}{(2\, f\, W)^2}\, ,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \frac{l_0\, W^2 - f\, g}{2\, fW} - 2\, f\, W\, C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{l_0\, W^2 - f\, g}{(2\, f\, W)^2}\, .$$

Konkrétní řešení pro tento případ získáme dosazením určených integračních konstant do (20). Máme

$$x(t) = \frac{\left(l_0\, W^2 - f\, g\right)}{2\, fW}\left[t + \frac{1}{2\, f\, W}\left(e^{-2\, f\, W\, t} - 1\right)\right]. \tag{21}$$

3) Posledním případem je mezní stav, kdy

$$w = \frac{W}{\sqrt{f^2 + 1}}\, . \tag{22}$$

Diskriminant charakteristické rovnice je pak nulový a tato má dvojnásobný kořen

$$l_{1,2} = -f\, w\, .$$

Obecné řešení homogenní rovnice (2) je

$$x_H\, (t) = e^{-f\, w\, t}\, (C_1 + C_2\, t)\, . \tag{23}$$

Pro partikulární řešení platí (protože žádný kořen charakteristické rovnice není nulový) stále (viz (9))

$$x_P = \frac{l_0\, w^2 - f\, g}{W^2 - w^2} = konst.$$

což vzhledem k (22) dává

$$x_P = \frac{l_0\, W^2 - f\left(f^2 + 1\right) g}{f^2\, W^2} = konst. \tag{24}$$

Dosazením (23) a (24) do známého vztahu $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ získáme obecné řešení jako

$$x(t) = \frac{l_0\, \Omega^2 - f\left(f^2 + 1\right) g}{f^2\, \Omega^2} + e^{-\frac{f\Omega}{\sqrt{f^2+1}} t}\left(C_1 + C_2\, t\right). \tag{25}$$

Derivací odtud

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{f\, W}{\sqrt{f^2+1}} t}\left[C_2 - \frac{f\, W}{\sqrt{f^2 + 1}}(C_1 + C_2\, t)\right].$$

Dosazením času $t = 0$ do posledních dvou rovnic a zohledněním triviálních počátečních podmínek vznikne

$$x(0) = 0 = \frac{l_0 W^2 - f\left(f^2 + 1\right)g}{f^2 W^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{l_0 W^2 - f\left(f^2 + 1\right)g}{f^2 W^2} \,,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = C_2 - \frac{f\,W}{\sqrt{f^2 + 1}} C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{f\,W}{\sqrt{f^2 + 1}} C_1 \,.$$

Dosazením do (25) za vypočítané integrační konstanty dostaneme konkrétní řešení ve tvaru

$$x(t) = \frac{l_0 W^2 - f\left(f^2 + 1\right)g}{f^2 W^2}\left[1 - e^{-\frac{f\,W}{\sqrt{f^2+1}}t}\left(1 + \frac{f\,W}{\sqrt{f^2 + 1}}t\right)\right].$$