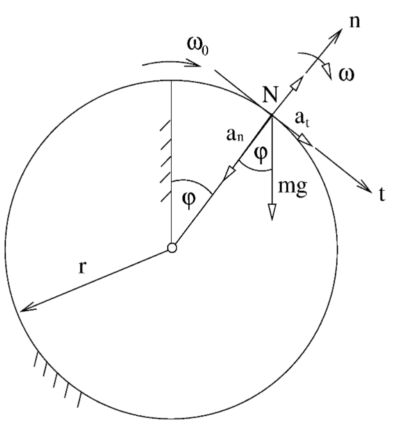
JEDNOSTRANNÁ VAZBA BODU K HLADKÉ KRUHOVÉ OBRUČI POLOMĚRU R UMÍSTĚNÉ VE SVISLÉ ROVINĚ

ÚLOHA VNĚJŠÍHO DOTYKU PŘI POČÁTEČNÍCH PODMÍNKÁCH $j\,(0) = 0$.

SPECIFIKACE PROBLÉMU



V obecné poloze charakterizované polohou j koná bod kruhový pohyb s úhlovou rychlostí w a úhlovým zrychlením a. Zrychlení má tečnou složku $a_n = r w^2$. Statickými silovými účinky jsou tíha *mg* a normálová reakce *N*.

ŘEŠENÍ

Pohybové rovnice jsou (směr tečny = vlastní poh. rovnice, směr normály → určení *N*).

$$m\, a_t = mg \sin j \tag{1}$$

$$m\, a_n = mg \cos j - N \tag{2}$$

Po dosazení za složky zrychlení dostaneme

$$r\, a = g \sin j \,, \tag{3}$$

$$N = m\left(g \cos j - r w^2\right). \tag{4}$$

Integrací (3) v oblasti polohy $\left(a = \dfrac{1}{2}\dfrac{dw^2}{dj}\right)$ mezi startem a obecnou polohou získáme

$$\frac{r}{2}\int_{w_0^2}^{w^2} dw^2 = g\int_0^j \sin j \; dj$$

odkud

$$w^2\,(j) = \frac{2g}{r}(1 - \cos j) + w_0^2 \,. \tag{5}$$

Dosazením (5) do (4) pak určíme reakci v závislosti na poloze

$$N(j) = m\left[g \cos j - 2g\,(1 - \cos j) - r w_0^2\right] = m\left[g\,(3\cos j - 2) - r w_0^2\right]. \tag{6}$$

Vzhledem k jednostrannosti vazba přenese pouze kladnou reakci. Mezní stav odpoutání bodu od rámu je charakterizován podmínkou $N = 0$, tedy podle (6)

$$\cos j = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{r w_0^2}{g}\right). \qquad (7)$$

Tato rovnice má řešení právě když její pravá strana není větší než jedna. Mezní případ řešitelnosti tedy je

$$\frac{1}{3}\left(2 + \frac{r w_0^2}{g}\right) = 1 \Leftrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}\,. \qquad (8)$$

Je-li $w_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$, odpoutá se bod od rámu hned na startu. V opačném případě až v takové poloze f, kdy podle (7) platí

$$f = \arccos\left[\frac{1}{3}\left(2 + \frac{r w_0^2}{g}\right)\right]. \qquad (9)$$

PŘÍKLAD

Automobilový závodník přejíždí vrchol stoupání kruhového profilu poloměru $r = 200\,m$. Určete mezní rychlost v_0 odpoutání se od vozovky ve vrcholu stoupání.

***Řešení*:** Podmínka odpoutání pro $j = 0$ (na startu) je podle (8) $w_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$. Protože zřejmě $v_0 = r\,w_0$, je $v_0 = \sqrt{g\,r}$. Po dosazení $g = 9{,}81\,m/s^2$, $r = 200\,m$ vychází $v_0 = 44{,}3\,m/s = 159{,}5\,km/hod$.

PŘÍKLAD

Z polohy $j = 0$ pustíme teoreticky z klidu (nepatrnou startovací rychlostí) bod. Určete polohu f odpoutání od obruče (koule) poloměru *r*.

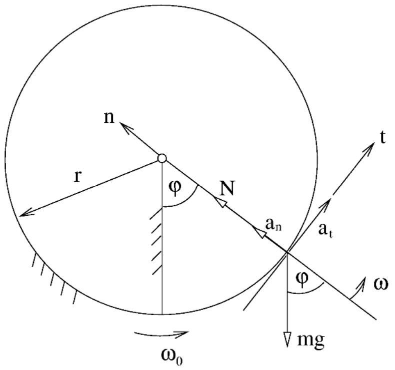
Řešení: Podle (9) pro $w_0 = 0$ je poloha odpoutání

$$f = \arccos\frac{2}{3} = 48^\circ\ 11'\ 22{,}9''.$$

Všimněme si, že tato hodnota nezávisí ani na poloměru obruče (koule), ale ani na gravitačním zrychlení. Tato poloha je stejná na Zemi, jako na Měsíci či Marsu.

ÚLOHA VNITŘNÍHO DOTYKU PŘI POČÁTEČNÍCH PODMÍNKÁCH $j(0)=0,\ w(0)=w_0$.

SPECIFIKACE PROBLÉMU



Jedná se opět o kruhový pohyb bodu, na který působí tíha *mg* a normálová reakce *N*.

ŘEŠENÍ

Pohybové rovnice mají tvar

$$t: \qquad m\ r\ a = -mg\ \sin j \tag{10}$$

$$n: \qquad m\ r\ w^2 = N - mg\ \cos j \tag{11}$$

Integrací (10) v oblasti polohy mezi startem a obecnou polohou j (v níž je úhlová rychlost w) získáme

$$\frac{r}{2}\int_{w_0^2}^{w^2} dw^2 = -g\int_0^{j} \sin j\ dj$$

odkud

$$w^2 = w_0^2 - \frac{2g}{r}(1-\cos j). \tag{12}$$

K zastavení bodu dojde, pokud $w = 0$. Tomu podle (12) odpovídá poloha j_1, pro níž

$$w_0^2 - \frac{2g}{r}(1-\cos j_1) = 0 \Leftrightarrow \cos j_1 = 1 - \frac{r w_0^2}{2g}. \tag{13}$$

Tato rovnice má řešení právě když její pravá strana není menší než mínus jedna (obor hodnot kosinu). Mezní případ její řešitelnosti tedy je

$$1 - \frac{r w_0^2}{g} = -1 \Leftrightarrow w_{01} = w_0 = 2\sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{14}$$

Z (11) plyne pro reakci

$$N = m\left(r w^2 + g\cos j\right),$$

takže po dosazení z (12) její závislost na poloze má tvar

$$N(j) = m\left[r w_0^2 - 2g(1-\cos j) + g\ \cos j\right] = m\left[r w_0^2 + g(3\cos j - 2)\right]. \tag{15}$$

Vzhledem k jednostrannosti vazby tato však opět přenese pouze reakci kladného signa. Mezní stav odpoutání se bodu je proto N = 0, což vzhledem k (15) nastane pro polohu j_2, pro kterou je

$$\cos j_2 = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{r w_0^2}{g}\right). \tag{16}$$

Tato rovnice má řešení právě když její pravá strana není menší než mínus jedna. Mezní případ řešitelnosti proto je

$$\frac{1}{3}\left(2 - \frac{r w_0^2}{g}\right) = -1 \Leftrightarrow w_{02} = w_0 = \sqrt{5}\sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{17}$$

Vzhledem k (13)až (17) tedy platí

1) Pokud $w_0 \leq w_{01} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}$ dojde k zastavení bodu v poloze

$$j_1 = \arccos\left(1 - \frac{r w_0^2}{2g}\right). \tag{18}$$

V opačném případě nedojde k zastavení nikdy (jedná se o úlohu bez tření)

2) Pokud $w_0 \leq w_{02} = \sqrt{5}\sqrt{\frac{g}{r}}$ dojde k odpoutání bodu v poloze

$$j_2 = \arccos\left[\frac{1}{3}\left(2 - \frac{r w_0^2}{g}\right)\right]. \tag{19}$$

Se vzrůstající startovací úhlovou rychlostí w_0 argumenty obou arkuscosinů v (18) a (19) klesají v (19) však pomaleji. Protože arc cos je klesající funkce, se vzrůstajícím w_0, pak j_1 i j_2 roste, j_2 rovněž pomaleji. Pro $w_0 = 0$ je $j_{10} = ar\cos\frac{2}{3} \doteq 48^{\circ}$. Existuje tedy w_0, kde se oba argumenty (a tedy i j_1 a j_2) vyrovnají. Podmínkou pro to je

$$1 - \frac{r w_0^2}{2g} = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{r w_0^2}{g}\right) \Leftrightarrow r w_0^2 = 2g. \tag{20}$$

Pro takové w_0 zřejmě podle (18) a (19) $j_1 = j_2 = p/2$. Dostáváme tedy tento výsledek:

a) Pro $w_0 \leq w_{01} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}$ (viz (20)) dojde dříve k zastavení bodu než aby mohlo dojít k jeho odpoutání od rámu. K zastavení pak dojde v poloze j_1 dané vztahem (18).

b) Pro $2\sqrt{\frac{g}{r}} < w_0 < \sqrt{5}\sqrt{\frac{g}{r}}$ naopak dojde dříve k odpoutání bodu od rámu než by mohlo dojít k jeho zastavení. K odpoutání dojde v poloze j_2 dané vztahem (19).

c) Pro $w_0 > \sqrt{5}\sqrt{\frac{g}{r}}$ nedojde nikdy k zastavení ani odpoutání a bod bude konat teoreticky nekonečně dlouhou dobu popisovaný (nerovnoměrný) kruhový pohyb.

Ve všech případech úhlová rychlost v závislosti na poloze je dána výrazem (12) a reakce vazby výrazem (15).

Poznámka: Řešení vlastní pohybové rovnice (10) v časové oblasti není možné analyticky v uzavřeném tvaru. Tato rovnice se totiž přepíše do tvaru

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin j = 0\,. \qquad (21)$$

Zavedením funkce $w = \frac{dj}{dt}$ lze pohybovou rovnici spolu s touto definicí zapsat jako soustavu dvou (nelineárních) diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{r}\sin j \;, \qquad \frac{dj}{dt} = w\,. \qquad (22)$$

Zavedením vektorové proměnné $\mathrm{j}^T = [w,\, j\,]$ lze soustavu přepsat na tvar

$$\frac{d\mathrm{j}}{dt} = \mathbf{f}\,(\mathrm{j}\,), \quad \mathbf{f}^T = \left[-\frac{g}{r}\sin j\,,\, w\right], \qquad (23)$$

kterou při počátečních podmínkách $\mathrm{j}^T(0) = [w_0,\, 0]$ lze numericky řešit např. metodou Rungeovou-Kuttaovou. V MATLABu lze použít příkazu ODE23 nebo ODE45. Výsledkem řešení je animace pohybu v čase spustitelná rovněž z této webové stránky.